ABAKÓS
PUC Minas
Instituto de Ciências Exatas e Informática

Ecologia de Aprendizagem para o Ensino de Probabilidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental*

Learning Ecology for Teaching Probability in the Final Grades of Elementary School

Indaclécio Paulo dos Santos[1]
José Ivanildo Felisberto de Carvalho[2]

Resumo

Este texto apresenta um recorte de uma pesquisa que objetiva desenvolver, aplicar e analisar uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem orientada para o Ensino e Aprendizagem de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. Para isto foram selecionados estudantes dos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental de uma escola pública no estado de Pernambuco. Baseado na teoria do Design Experiments, a pesquisa foi realizada por meio de três ciclos investigativos envolvendo respectivamente os conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação e comparação de probabilidades. No desenvolvimento do design, percebemos que as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes estão centradas no mapeamento das possibilidades, o que se deve à falta de repertório de estratégias utilizadas para combinações, ou porque os estudantes não as conhecem, ou porque não sabiam aplicá-las nas atividades. Os resultados apontam que os recursos e atividades vivenciados junto aos estudantes possibilitaram a aprendizagem do conhecimento probabilístico deste grupo. Dentre os resultados, afirmamos a construção conceitual das noções de probabilidade perpassando pela compreensão das diferentes situações de natureza aleatória e por situações envolvendo as concepções frequentista e clássica de probabilidade.

Palavras-chave: Probabilidade. Ensino e aprendizagem de Probabilidade. *Design experiments*.

*Submetido em 05/06/2019 - Aceito em 28/09/2020
[1]Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE-CAA), Professor da Secretaria de Educação de Pernambuco, Brasil– idaclecio@hotmail.com
[2]Professor Doutor em Educação Matemática do Núcleo de Formação Docente da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Brasil– ivanfcar@hotmail.com

Abstract

In this paper, we present an investigation that aims to develop, apply, and analyze a sequence of activities characterized as learning ecology oriented to the Teaching and Learning of Probability in the final grades of Elementary School. We selected students in the 7th and 8th grades of the last years of Elementary School from a public school in the state of Pernambuco. Based on the theory of Design Experiments, the research was carried out through three investigative cycles involving, respectively, the concepts of randomness, sample space, and quantification and comparison of probabilities. In the design development, we noticed that the main difficulties presented by the students are centered on the mapping of possibilities, which is related to the lack of repertoire of strategies used for combination, because the students did not know them or they did not know how to apply them in the activities. The results show that the resources and activities experienced by the students enabled them to learn probability contents. Among the results, we point out the conceptual construction of the notions of probability through the understanding of different situations of random nature and by situations involving the frequentist and classical conceptions of probability.

Keywords: Probability. Teaching and learning of Probability. Design experiments.

1 INTRODUÇÃO

É indiscutível a importância do estudo de Probabilidades dentro do contexto social atual, fato já apontado por documentos oficiais que parametrizam a educação brasileira, por se tratar de conceitos que auxiliam no raciocínio, na compreensão da natureza aleatória e fenômenos não determinísticos, na análise de possibilidades e confronto de probabilidades, no raciocínio combinatório, nas análises de risco, entre outros (BRASIL, 1998; BRASIL, 2018).

No entanto, embora haja este reconhecimento, tanto do ensino de probabilidade como do estudo de Estatística e Combinatória e a importância na vida em sociedade, o ensino e a aprendizagem da probabilidade na educação básica segundo diversas pesquisas (BATANERO, 2005; BORBA et al., 2011; SANTOS, 2010; CAMPOS; CARVALHO, 2016), apontam que ainda existem muitos entraves de aprendizagem, restringindo-se a memorização de fórmulas sem o entendimento das propriedades e conceitos envolvidos, sem apresentar significados para os alunos, principalmente quando tratamos da abordagem da probabilidade no Ensino Fundamental.

Por outro lado, Borba et al. (2011) e Silva (2014) destacam que o ensino com a Estatística, Probabilidade e Combinatória já estejam previstos para serem ensinados na Educação Básica desde a época dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) até o atual documento curricular, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Lopes (1999), Oliveira e Cazorla (2008), Borba et al. (2011) e Silva (2014), ainda apontam sobre a limitação de conteúdos referente a Estatística, Probabilidade e Combinatórias nos cursos de licenciatura, cujo princípio fundamental é a formação de professor, o que contribui para uma formação muitas vezes incipiente, desenvolvimento da aversão sobre tais conteúdos quanto ao ensino dentro da educação básica, ou um ensino deficiente, devido à falta de compreensão e domínio dos conceitos elementares, em especial aos de Probabilidade como pode-se observar nas pesquisas de Pietropaolo et al. (2014) e Carvalho (2017).

Neste sentido, Lopes (1999) e Jolliffe (2005) chamam atenção para a necessidade de uma formação docente inicial e continuada de professores sejam direcionadas abordagens envolvendo situações práticas, experimentais e de construção de significados referente ao conceito de Probabilidade, bem como saber desenvolver instrumentos e materiais de ensino, pois assim, o professor terá autonomia para exercer sua função com autonomia e qualidade.

Deste modo, o presente estudo surgiu da necessidade de investigar o processo de Ensino e de Aprendizagem de Probabilidade no cenário educacional atual, a fim de conhecer os processos utilizados por estudantes nas resoluções de problemas, com intuito de compreender as dificuldades para encontrar alternativas e superá-las. Houve também um crescente desejo de encontrar e apresentar metodologias e alternativas práticas para compartilhá-las com demais profissionais que também lidam com os mesmos dilemas em seu cotidiano escolar, bem como explorar a utilização de recursos didáticos que poderiam servir de ferramenta para auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem.

A pesquisa se destinou a responder a seguinte questão norteadora: “*Como raciocinam e* *quais as dificuldades que alunos dos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental apresentam mediante a probabilidade e as noções de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação?*". Com intuito de procurar responder à questão motivadora da pesquisa, tivemos com este estudo o objetivo de "*Desenvolver e analisar uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem orientada para o ensino e aprendizagem de Probabilidade com estudantes dos 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental*".

Decidimos utilizar a metodologia Design Experiments (BROWN, 1992; COBB et al., 2003), por entendermos que a mesma apresenta subsídios importantes para compreender como os estudantes desenvolvem seu conhecimento e quais as dificuldades encontradas no processo de ensino que interferem na aprendizagem. Para desenvolver uma proposta de ecologia de aprendizagem que permitisse aos discentes experienciar atividades que auxiliem na sua própria educação levando-os a manipular, refletir, conjecturar e testar suas próprias hipóteses.

Com relação à Probabilidade, levamos em consideração as demandas cognitivas essenciais para a compreensão da Probabilidade, apresentadas por Bryant e Nunes (2012): Aleatoriedade, Espaço Amostral, Quantificação e Comparação de Probabilidades. Tratando-se de uma pesquisa realizada no âmbito do Ensino Fundamental, lançaremos mão das concepções intuitiva, frequentista e clássica (ou Laplaciana) da Probabilidade (BATANERO, 2005; COUTINHO, 2007), por se tratar de significados abordados com mais frequência no Ensino Fundamental, previstos pela BNCC (BRASIL, 2018).

2 *DESIGN EXPERIMENTS*: O NOSSO MARCO TEÓRICO

A metodologia Design Experiments (DE), que em português quer dizer experiências de projeto ou desenho de um experimento, é uma metodologia de ensino que envolve modelos de "engenharias de ensino" em que a aprendizagem acontece de modo sistemático dentro de um contexto definido em ciclos ou etapas que se complementam.

Cobb et al. (2003) destacam que uma pesquisa baseada em design pode ser dividida em algumas modalidades, que variam de acordo com a finalidade da pesquisa e os sujeitos que farão parte do processo de aprendizagem. Dentre estas modalidades, os autores destacam o desenvolvimento e aplicação de um design em pequena escala, a qual seja possível à realização de análises com mais profundidade e com riqueza de detalhes, o que os autores classificam como Ecologia de Aprendizagem (COBB et al., 2003; KARRER, 2006).

Particularmente, nos propusemos a desenvolver uma Ecologia de Aprendizagem em pequena escala, que nos permitisse oferecer aos estudantes um ambiente propício para construção de significados, e no âmbito desta metodologia, se torna uma importante ferramenta para descrever e analisar as experiências, o raciocínio e os erros cometidos pelos estudantes durante o desenvolvimento dos ciclos do *design*.

De acordo com Cobb et al. (2003), essa modalidade de um *Design Experiment* em pequena escala possui pontos convergentes:

- O objetivo de desenvolver um modelo psicológico no qual os alunos possam desenvolver uma compreensão de um conceito matemático particular diante das tarefas e da prática de ensino colocadas pelo professor;
- A natureza intervencionista da metodologia. Diante da ideia de que um estudo baseado em *design* tem como proposta a inovação;
- O aspecto prospectivo, que se refere ao surgimento e implementação de uma hipótese, e o aspecto reflexivo, que refere-se às análises das conjecturas e hipóteses elaboradas durante o desenvolvimento do experimento em diferentes níveis;
- O caráter cíclico, oriundos dos aspectos prospectivo e reflexivo, trata-se de uma construção iterativa, que está sujeita a mudanças (*redesign*) ou adaptações, ocorridas no processo entre os sujeitos;
- O caráter pragmático, com objetivos bem detalhados e precisos, com sistema de análise previamente organizado e adequado para identificar e analisar os problemas e dificuldades encontradas durante o processo.

Conforme apontam os autores Brown (1992) e Cobb et al. (2003), os ciclos de um *Design Experiment* são cíclicos e iterativos, isso quer dizer que um ciclo não pode se prender ao desenvolvimento de um único conceito, ou seja, que no desenvolvimento de uma pesquisa baseada em Design, os ciclos podem e devem interagir com os outros ciclos para promover a mobilização de diversos conceitos e teorias permitindo uma reestruturação e/ou readaptação diante das novas possibilidades que se fizerem necessárias.

Deste modo, diante do interesse de investigar essas interações entre os estudantes e o objeto matemático pesquisado, nos propusemos a desenvolver um ambiente de aprendizagem, com foco no desenvolvimento e análise de três ciclos iterativos, que nos permitiu buscar compreender como os alunos do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental desenvolvem o conhecimento probabilístico mediante as situações propostas, que envolveram os conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e a quantificação e comparação da força de duas probabilidades.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa teve como objetivo desenvolver, aplicar e analisar uma sequência de atividades caracterizadas como ecologia de aprendizagem através de recursos didáticos voltada para o Ensino de Probabilidade no 7º e 8º anos do Ensino Fundamental baseada na teoria *Design Experiments*. Com base na visão de uma pesquisa qualitativa, que busca analisar os processos de aprendizagem de domínios específicos de Probabilidade em atividades a serem desenvolvidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

O estudo foi realizado com estudantes de uma escola pública estadual no Agreste Pernambucano. A pesquisa contou com a participação de 7 estudantes do 7º e do 8º anos do Ensino

Fundamental, com idades entre 12 e 14 anos. O grupo foi composto por 2 estudantes do 7º ano e 5 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental da referida escola.

O *design* aplicado na pesquisa está dividido em três ciclos, conforme as demandas cognitivas necessárias para compreender a probabilidade de acordo com Bryant e Nunes (2012) e Nunes et al. (2012): Aleatoriedade, Espaço Amostral e, Quantificação e Comparação de Probabilidades. Sendo aplicado em cinco encontros com duração média de 90 min cada. Com base na proposta de uma ecologia de aprendizagem que permita aos alunos formular, testar e conjecturar as teorias que estão sendo desenvolvidas ao longo do experimento. Para o desenvolvimento dos ciclos do design, reunimos 12 atividades, desenvolvidas por Carvalho (2017), Santos (2010, 2015), Kataoka (2010), Fernandes (1999) e algumas das atividades do programa de ensino desenvolvidas por Nunes et al. (2012) sobre Probabilidade.

No quadro 1, podemos observar as atividades que foram utilizadas e o objetivo proposto por cada uma em cada ciclo do design, contendo as noções e conceitos a serem desenvolvidos dentro de cada ciclo.

Quadro 1 – Ciclos do *design* contendo as Atividades e os objetivos correspondentes

Ciclos do Design	Atividade	Objetivo da Atividade
1º CICLO Aleatoriedade	Jogo dos caça-níqueis	Analisar e identificar fenômenos aleatórios e padrões previsíveis em um jogo de computador.
	O problema das cartas de João	Reconhecer fenômenos aleatórios e não previsíveis pós embaralhamento de cartas em um jogo de computador.
	As fichas de Jade	Analisar e identificar fenômenos aleatórios e determinísticos em um jogo de computador, bem como estimar a ocorrência nas situações previsíveis.
	Tabuleiro de bolinhas	Reconhecer um fenômeno aleatório e a imprevisibilidade na disposição das bolinhas por meio de um jogo de computador.
	Jogo do par ou ímpar	Promover uma melhor compreensão acerca de termos do vocabulário probabilístico, bem como compreender o raciocínio combinatório das possibilidades em um jogo de par ou ímpar.
	Impossíveis versus Improváveis	Analisar e discutir a diferença entre eventos impossíveis e improváveis justificando o seu raciocínio.
2º CICLO Espaço Amostral	Os filhos de Romeu e Julieta	Mapear todas as combinações sem esquecer nenhuma delas, identificando e quantificando as possibilidades para cada combinação diferente.
	Corrida de cavalos	Verificar a existência de espaço amostral não equiprovável, identificando a existência de eventos impossíveis, menos e mais prováveis de ocorrer.
	Passeios aleatórios da Mônica	Compreender a aleatoriedade da situação-problema, bem como realizar experimento aleatório para obtenção da probabilidade frequentista, mapear espaço amostral, calcular e verificar que as probabilidades de cada amigo ser visitado não são equiprováveis.
3º CICLO Quantificação e Comparação de Probabilidades	Clube de danças	Desenvolver espaço amostral e identificar eventos dentro deste espaço de possibilidades para quantificar probabilidades por meio do significado clássico de probabilidade ou laplaciano.
	Bolinhas no saco	Comparar probabilidades examinando o espaço amostral e optar pela melhor chance utilizando a razão.
	Blocos no saco	Comparar probabilidades examinando o espaço amostral e optar pela melhor chance utilizando a razão.

Fonte: Dados da Pesquisa (2019).

Devido ao espaço limitado neste artigo, apresentaremos apenas os resultados e análises referente a 6 atividades, sendo duas de cada ciclo do design. São elas: “As fichas de Jade”, “Jogo do par ou ímpar”, “Os filhos de Romeu e Julieta”, “Corrida de cavalos”, “Clube de danças” e, “Bolinhas no saco”.

Para a coleta dos dados utilizamos um caderno de acompanhamento do estudante, duas câmeras filmadoras e dois gravadores de áudio, também com a autorização dos estudantes participantes e de seus responsáveis sob assinatura de termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) pelos pais ou responsáveis, atendendo as exigências dos aspectos éticos conforme a Resolução 466/12 do CNS, o direito à privacidade e o uso de imagem dos estudantes.

A seguir, apresentamos as análises e discussões das atividades mobilizadas nos ciclos do *design* que caracteriza nossa ecologia de aprendizagem.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA ECOLOGIA DE APRENDIZAGEM IMPLEMENTADA

Antes do início das atividades foi aberto um espaço de socialização entre os estudantes, bem como estes foram esclarecidos sobre o funcionamento da pesquisa, da coleta e registros dos dados para que os mesmos não se sentissem intimidados pelas câmeras e gravadores. Neste momento também foram repassadas instruções sobre o uso de um *notebook*.

Apenas por caráter organizacional e para preservar a identidade dos estudantes, chamaremos os alunos do 8º ano de A, B, C, D e E, e os estudantes do 7º ano de F e G, porém, cabe destacar que o estudante G participou apenas do ciclo aleatoriedade.

A seguir, apresentamos as descrições e análises das atividades desenvolvidas em cada um dos ciclos do design.

4.1 Primeiro Ciclo do Design: Aleatoriedade

Para o desenvolvimento do primeiro ciclo do *Design Experiments*, tivemos como objetivo investigar o conhecimento de um grupo de estudantes, buscando compreender os seus raciocínios e as dificuldades diante de atividades e situações que envolvessem o conceito de aleatoriedade.

Para o desenvolvimento das atividades deste ciclo, contamos com a participação dos estudantes, sendo formadas as seguintes duplas: A e B; C e G, e; E e F.

Atividade: As fichas de Jade

Esta atividade é composta por três situações (Figura 1), sendo a Situação 1 de natureza aleatória (imprevisível), e as Situações 2 e 3, o resultado poderia ser previsto. A atividade foi apresentada aos estudantes em slides de computador numa espécie de jogo de múltipla-escolha.

Figura 1 – As fichas de Jade

1ª Situação: Jade tem 4 fichas, todas elas são pretas de um lado e brancas do outro. Ela joga as fichas para cima que caem ao chão. Como elas ficarão após caírem no chão?

2ª Situação: Jade coloca as mesmas 4 fichas na mesa com o lado branco virado para cima. Em seguida, ela vira cada ficha. Como elas ficarão agora?

3ª Situação: Jade coloca as mesmas 4 fichas na mesa com o lado branco voltado para cima. Em seguida, ela vira metade das fichas. Como as fichas ficarão agora?

O que há de diferente, em relação ao resultado, na primeira situação comparada com as outras duas situações?

Fonte: Nunes et al. (2012).

As três duplas participantes conseguiram responder as três situações apresentadas corretamente, sem precisar jogar mais de uma vez para encontrar a resposta correta. A única dificuldade apresentada por alguns estudantes foi ao justificarem suas respostas por escrito no caderno de acompanhamento, como podemos acompanhar pela fala do estudante C: "*Eu acertei, mas não sei o que escrever*". Deste modo intensificamos os diálogos entre os estudantes, levando-os a buscar primeiro expor verbalmente seu raciocínio e posteriormente fazer este registro no caderno de acompanhamento. Como podemos perceber no relato dos estudantes A e B:

> Na primeira [*situação 1*], Jade jogou as fichas para cima, foi aleatória, não dava pra saber [*o resultado*]. Na segunda e na terceira [*situações 2 e 3*], ela virou as cartas, dava para saber a ordem em que as fichas ficaram. (Estudantes A e B)

Nesta atividade, percebemos que os estudantes perderam um pouco do medo e conseguiram articular melhor suas palavras. Em seus registros, as justificativas apresentadas quanto à diferença entre os jogos foi bem semelhante, apesar das duplas terem feito os registros separadamente.

Diante dos dados coletados, compreendemos que nosso objetivo foi alcançado, pois os estudantes foram capazes de analisar e identificar o fenômeno aleatório e quando se tratou de eventos determinísticos, os estudantes conseguiram prever estas ocorrências.

Atividade: Jogo do par ou ímpar

A figura 2 a seguir, é uma atividade retirada de Santos (2015), e a partir dela os estudantes interagiram com o jogo do par ou ímpar, como esperado, a familiarização com o jogo no cotidiano dos estudantes facilitou a compreensão e o desenvolvimento das atividades propostas.

Figura 2 – O Jogo do Par ou Ímpar

Cada jogador escolhe se quer o 'par' ou o 'ímpar'. Definido isso, os dois jogadores, um de frente para o outro, lançam, ao mesmo tempo, as mãos para frente com valores de 0 a 5 (indicados com a quantidade de dedos das mãos). Se a soma for um número par vence o jogador par, se for um número ímpar, vence o jogador ímpar.

1ª Situação: Escreva todas as possibilidades de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas. Cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos.

2ª Situação: Considerando os possíveis resultados de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas – em que cada jogador só pode usar os dedos de uma de suas mãos –, classifique com <u>uma das palavras</u> do quadro abaixo os acontecimentos citados:

Impossível – pode ser – possível – bastante provável – certo – se espera que – seguro – há alguma possibilidade – há alguma probabilidade – incerto

a) A soma ser um número ímpar: ____

b) A soma ser um número menor do que 10: ______________________________

c) A soma ser o número 12: ____

d) A soma ser um número maior do que 0: _______________________________

e) A soma ser o número 0: ____

f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos: ___________________

g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais: ____________________

Fonte: Santos (2015).

Sem muitas dificuldades, na 1ª Situação, os estudantes conseguiram descrever todas as combinações indicando os pares de números de um possível resultado em um jogo de par ou ímpar entre dois jogadores, no entanto nenhuma das duplas se preocupou em determinar se o resultado havia sido par ou ímpar, eles apenas transcreveram as combinações em pares.

Dentre as estratégias apresentadas, as duplas A e B, e C e G passaram a fixar o resultado de um jogador e combinar com os possíveis resultados do outro, seguindo a ordem crescente, forma de representação semelhante ao produto cartesiano. Por outro lado, a dupla E e F não seguiram nenhuma estratégia para facilitar as combinações, eles apenas foram descrevendo combinações que lembravam e a princípio não apresentaram como resultados possíveis, as combinações com os números de dedos iguais.

Na 2ª Situação, os estudantes foram levados a exercitar a linguagem probabilística ao analisar possíveis eventos no jogo de par ou ímpar, buscando exprimir as chances ou força de determinado evento ocorrer. As respostas apresentadas pelos estudantes podem ser acompanhadas no quadro 2.

Quadro 2 – Respostas apresentadas pelas duplas na 2ª Situação do Jogo Par ou Ímpar.

Respostas das duplas na 2ª Situação	A e B	C e G	E e F
a) A soma ser um número ímpar	Possível	Possível	Possível
b) A soma ser um número menor do que 10	Se espera que	~~Certo~~	~~Pode ser~~
c) A soma ser o número 12	Impossível	~~Incerto~~	Impossível
d) A soma ser um número maior do que 0	Bastante provável	Bastante provável	Bastante provável
e) A soma ser o número 0	Há alguma possibilidade	Pode ser	Pode ser
f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos	Bastante provável	~~Há alguma probabilidade~~	~~Pode ser~~
g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais	Pode ser	Há alguma possibilidade	Há alguma possibilidade

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nesta situação, a maioria das respostas apresentadas pelos estudantes pode ser considerada correta para o evento apresentado. Os estudantes conseguiram analisar a situação e apresentar uma palavra/frase que indicava as chances de cada evento ocorrer. Podemos destacar neste caso a dupla A e B que apresentaram as palavras/frases que melhor se adequavam, enquanto os demais estudantes não levaram em consideração as combinações encontradas, representadas pelas respostas tachadas/riscadas no quadro 2.

Dentre estas respostas podemos destacar que ao analisar "a soma ser um número menor do que 10" num jogo de par ou ímpar, a dupla C e G classificou como sendo um evento "certo" o que indica um evento 100% provável, a falha da resposta existe já que o resultado da soma pode ser exatamente 10. Por outro lado, a dupla E e F classificou com a chance "pode ser" o que indica pouca probabilidade, quando a probabilidade é bem alta. A dupla C e G também classificou o evento "a soma ser o número 12" como "incerto", quando deveria ser classificado como impossível já que o maior valor possível para soma é 10. E para o evento "os colegas apresentarem números de dedos distintos", as duplas também apresentaram palavras que indicavam pouca probabilidade de ocorrer como "há alguma probabilidade" e "pode ser".

No final desta atividade, foi aberto um espaço para os estudantes trocarem ideias e comparar suas respostas, onde o professor-pesquisador também mostrou no quadro outras formas de representação das possibilidades em árvore de possibilidade e em tabela, e a partir destas representações foi feita a análise das situações do evento para usar uma palavra para expressar as chances.

Neste primeiro ciclo, percebemos que os estudantes tiveram poucas dificuldades para compreender e responder as atividades. As principais dificuldades apresentadas se deram no momento que os estudantes precisaram explicar as respostas que apresentaram, embora tenham acertado, os estudantes não souberam explicar como o fizeram. A outra dificuldade ocorreu na adoção de estratégias para mapear o espaço amostral, o que provavelmente se deve à falta de relação com combinatória, os estudantes demonstraram não conhecer estratégias para mapear as possibilidades, o que levou os estudantes esquecerem algumas combinações. Resultados semelhantes são observados nas pesquisas de Santos (2010, 2015) e Tonouti (2013).

No entanto, com as intervenções realizadas sempre que necessário para sanar as dúvidas, os estudantes conseguiram expressar o raciocínio que utilizaram para responder as atividades, bem como conseguindo utilizar corretamente termos do vocabulário probabilístico trabalhadas na atividade "par ou ímpar" e refazer o mapeamento das possibilidades para encontrar as combinações não mapeadas.

Diante desses resultados, podemos afirmar que os alunos conseguiram analisar e identificar os fenômenos aleatórios e determinísticos utilizando ideias intuitivas, compreender o fator combinatório e desenvolver as possibilidades existentes no jogo de par ou ímpar, bem como compreender e estimar com uma palavra/frase do vocabulário probabilístico a probabilidade de um evento ocorrer, embora o fato de não analisar as possibilidades que haviam descoberto anteriormente tenham prejudicado nas suas avaliações.

4.2 Segundo Ciclo do Design: Espaço Amostral

Neste ciclo, tivemos o intuito de fortalecer o pensamento aleatório do primeiro ciclo, buscando analisar e compreender o pensamento e o raciocínio aleatório e combinatório dos estudantes nas suas formas de representação e mapeamento das possibilidades presentes em cada atividade. Com base neste mapeamento, os estudantes precisaram explicar e quantificar as possibilidades de determinados eventos a partir deste espaço amostrais mapeados.

Atividade: Os filhos de Romeu e Julieta

Nesta atividade, apresentada na figura 3, os estudantes deveriam analisar as possibilidades do nascimento de três crianças, tendo como princípios as diferentes combinações de sexo dos bebês, para avaliar a situação de maior chance.

Figura 3 – Atividade Os filhos de Romeu e Julieta

Situação: Romeu e Julieta estão planejando ter três filhos após o casamento. Como sabemos, o sexo do bebê que será gerado não pode ser determinado, sabemos apenas que pode ser do sexo masculino e feminino. Romeu e Julieta estavam pensando nas combinações possíveis dos filhos que teriam entre a quantidade de homens e mulheres.

a) O que você acha que é mais provável de acontecer?

( ) Ter os três filhos do mesmo sexo.
( ) Ter apenas dois filhos do mesmo sexo.
( ) As chances são as mesmas.

Por quê?

b) Descreva todas as combinações possíveis dos filhos que Romeu e Julieta poderiam ter, pensando pela ordem dos nascimentos dos filhos.

Fonte: O Autor (2019).

Inicialmente, no item 'a', as duplas apresentaram o mesmo dilema, deduzindo que os nascimentos dos três filhos seriam necessariamente trigêmeos. Desde modo, foi necessário explicar aos estudantes que se tratava de nascimentos distintos, ou seja, gestações distintas. Logo após, as duplas afirmaram que "as chances são as mesmas", no entanto alguns estudantes tiveram bastante dificuldade de justificarem as respostas apresentadas, principalmente por escrito no caderno de acompanhamento, sendo necessário a abertura de um espaço para socialização e troca de ideias entre os estudantes. Entre as respostas apresentadas o estudante D justificou: "*Porque pode vir três meninos como também três meninas ou pode vir misturado*".

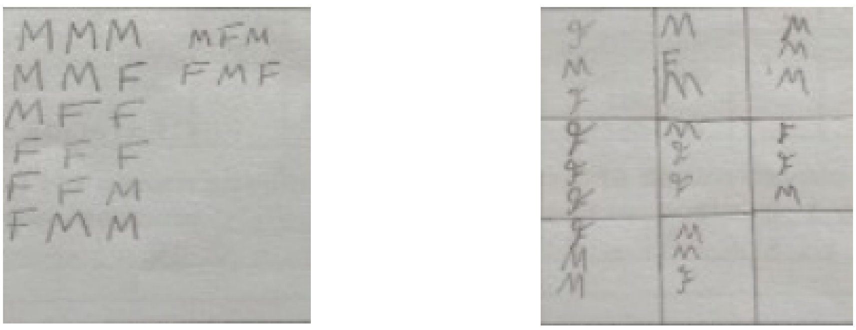
Neste pensamento, o estudante explicou que as chances seriam as mesmas, pois seriam duas chances de nascerem três crianças do mesmo sexo, como poderiam ser duas chances de nascimento do mesmo sexo e um de sexo diferente. No entanto, os estudantes não buscaram descrever por conta própria as diferentes formas de nascimento, para poder analisar essas diferentes combinações de nascimento.

Deste modo, no item 'b', onde os estudantes foram orientados a descreverem todas as combinações diferentes em um nascimento.

As duplas de estudantes A e B, E e F representaram todas as combinações corretamente, não esquecendo ou repetindo nenhuma combinação. Eles utilizaram as iniciais M para masculino e F para feminino, sugerido pelo professor-pesquisador para não ser necessário escrever a palavra completa, para que a representação fosse menos cansativa. Por outro lado, a dupla C e D, optaram por escrever a palavra completa (homem / mulher) ao representarem. No entanto, esqueceram de representar duas possibilidades que vieram a ser corrigidas quando alertados pelo professor-pesquisador.

A dupla de estudantes A e B foi a única que apresentou uma estratégia ao descrever as possibilidades, esgotando primeiramente as combinações usando M (masculino) e F (Feminino), forma de representação de espaço amostral bem semelhante às utilizadas em Combinatória, enquanto as demais duplas precisaram revisar as combinações e identificar as não combinações que faltavam. Na Figura 4, apresentamos o mapeamento de duas duplas.

Figura 4 – Registros do mapeamento feito pelos estudantes.



Registro da dupla A e B Registro da dupla E e F

Fonte: O Autor (2019).

Ao serem convidados no item ‘c’, a partir da descrição das combinações, ao reanalisar o primeiro item os estudantes constataram de que a maior chance seria de nascerem bebês de sexo diferente, como podemos acompanhar na justificativa apresentada por duas duplas:

> A e B: É mais provável nascerem dois do mesmo sexo e um diferente, porque a probabilidade é maior.
>
> C e D: Nascer dois do mesmo sexo e o outro do sexo oposto.

Sem dificuldades, os estudantes conseguiram justificar estas chances comparando com a descrição do espaço amostral que acabaram de fazer. O que ressalta a importância da descrição do espaço amostral no estudo de probabilidade, bem como medir e comparar a força entre duas ou mais probabilidades. Ao final desta atividade, o professor-pesquisador refez o mapeamento utilizando a árvore de possibilidade e o produto cartesiano.

Observados resultados semelhantes em pesquisas com situações semelhantes, no “Jogo do Lobo Mau e da Chapeuzinho” de Santos (2010) aplicado no Ensino Fundamental e no “Jogo da Samanta” de Tonouti (2013) aplicado na Educação Infantil. Diante de uma situação que aparentemente possuem mesmas chances, faz-se necessário determinar as diferentes possibilidades do espaço amostral e determinar a maior probabilidade. Santos (2010) destaca que nestes momentos é necessária a utilização da análise de possibilidades (combinatória).

Diante destes resultados, acreditemos que o objetivo proposto pela atividade foi alcançado, visto que os estudantes foram capazes de mapear todas as combinações, embora uma das duplas tenha sido convidada a reanalisar as opções e identificar a as combinações esquecidas. Contudo, os estudantes conseguiram identificar e quantificar as possibilidades para analisar os eventos discutidos.

Atividade: Corrida de cavalos

Esta atividade foi adaptada de Santos (2015), e propõe um jogo cujo objetivo proposto para o design previu o mapeamento das combinações realizada com as faces de dois dados, numeradas de 1 até 6, a fim de auxiliar no raciocínio e compreensão dos alunos sobre a existência de espaço amostral não equiprovável, como podemos observar na figura 5 a seguir.

Figura 5 – Atividade Corrida de cavalos

Regras do jogo:
- Cada jogador aposta em três cavalos, podendo ambos, apostar no mesmo cavalo.
- Alternadamente, os jogadores lançam os dados e calculam a soma dos pontos obtidos na face superior dos mesmos.
- A soma obtida corresponde ao cavalo que avançará uma casa.
- Ganha o cavalo que primeiro alcançar a linha de chegada, independentemente de ser um dos cavalos apostados.

CHEGADA													
9													
8													
7													
6													
5													
4													
3													
2													
1													
LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
REGISTRO DAS APOSTAS													

a) Há algum cavalo que tem mais ou menos chances de vencer que o outro? Justifique sua resposta.

b) Descreva todas as possibilidades existentes entre a soma de dois dados. Em seguida, quantifique as chances que cada número tem de ocorrer no lançamento.

c) O registro feito no tabuleiro da corrida e o total de possibilidades para número são semelhantes?

Fonte: Santos (2015).

Explicado as regras do jogo, os estudantes fizeram suas 'apostas'. No início, alguns estudantes analisaram as numerações para escolher os cavalos que esperariam vencer, outros estudantes passaram a observar as possibilidades que poderiam ocorrer para que um cavalo pudesse avançar no jogo. Em meio a esta análise, antes mesmo de começarem a jogar, o estudante B comenta com outra dupla ao seu lado e com o professor-pesquisador:

> B: Os dados não vão dar 1 não.
> Pesquisador: Por que não?
> B: Como é que vai dar 1? Como é que vai dar 13?
> E: Do número 1 eu já sabia. 'Eita', eu apostei no 13.
> F: Por isso, eu não marquei nenhum dos dois.

Percebemos, por meio deste diálogo, que os B, E e F conseguiram reconhecer que os números 1 e 13 são impossíveis de acontecer em um jogo envolvendo a numeração de apenas dois dados. Por outro lado, a dupla C e D, chegou a este raciocínio enquanto jogavam, como podemos observar na fala do estudante C: "*O 13 não tem como. [...]. Porque o valor máximo só vai até o 12*". Isso demonstra a importância do processo empírico no estudo de probabilidade.

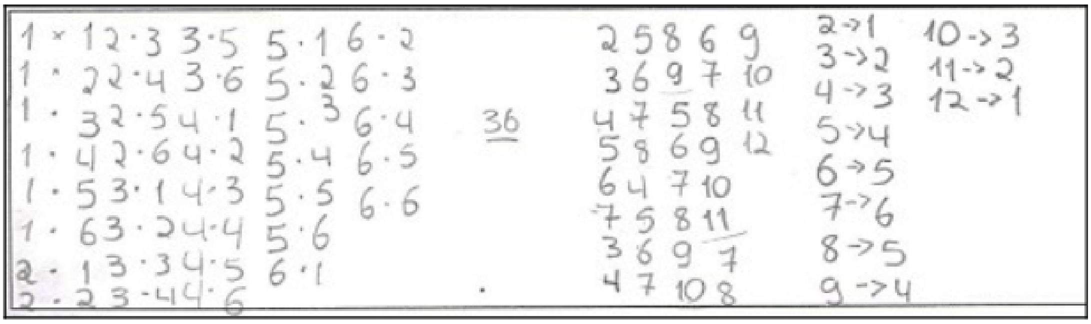
Finalizado o jogo, o 'cavalo' de número 7 foi o vencedor, no jogo das três duplas, os alunos foram B e F, porém, a dupla C e D não apostou no número 7. No item 'a', ao explicarem qual cavalo tinha mais ou menos chance, destacamos as seguintes respostas:

> C: Eu acho que o 7 tem mais chance [...]. Pode ser 4 e 3, 5 e 2, 6 e 1, e pode trocar. O 7 teria mais possibilidade de ganhar por causa da soma.
>
> E e F: O 7 têm mais chances porque 'tá' no meio [...]. 1 e 13 é impossível porque são dois dados.

Diante destas respostas, podemos perceber que os alunos conseguiram identificar os eventos impossíveis no jogo e o número que possuía mais chance, isso se deve principalmente pelo resultado do jogo, quando o cavalo 7 venceu.

No item 'b', quando levados a descrever as possibilidades existentes para um jogo com dois dados, as duplas A e B, C e D conseguiram apresentar todas as combinações possíveis e quantificar o número de chance para cada resultado. Como podemos observar no registro da dupla A e B, na Figura 6.

Figura 6 – Registros do mapeamento feito pelos estudantes A e B



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nessa estratégia utilizada pelas duplas para mapear o espaço amostral, os estudantes fixaram a numeração do primeiro dado, combinando com a sequência de resultados do segundo. Modo semelhante ao produto cartesiano utilizado para mapear as combinações no estudo de Probabilidade e Combinatória. Enquanto isso, a dupla E e F combinaram primeiro as situações com as faces dos dados iguais, logo em seguida utilizaram a mesma estratégia dos colegas.

Ao fim desta atividade, já no item 'c', os estudantes afirmaram que o registro de apostas apresentou resultado semelhante a descrição dos resultados no mapeamento, com o 7 possuindo "*mais chances de aparecer do que 1 e 13 que não aparece*" (C e D), já que são eventos impossíveis.

Os resultados encontrados demonstram que o objetivo proposto para esta atividade foi atingido, pois os estudantes conseguiram perceber e identificar que nem todos os números possuíam a mesma chance e que existiam eventos que eram impossíveis de ocorrer, bem como também foram capazes de desenvolver o espaço amostral existente numa situação que envolvia dois dados numerados de 1 a 6.

Esses resultados também estão na mesma direção dos encontrados em outras pesquisas, tais como a de Santos (2010) com estudantes do Ensino Fundamental e a de Tonouti (2013), em um estudo com estudantes da Educação Infantil. Nestes trabalhos, as autoras destacam a concepção intuitiva apresentada pelos estudantes envolvendo dados e a necessidade de se relacionar aos conceitos de combinatória.

Durante o desenvolvimento das atividades do ciclo Espaço Amostral, percebemos que os estudantes ainda tiveram dificuldades em adotar estratégias para mapear o espaço amostral, bem como a dificuldade de ter a iniciativa própria de buscar as combinações para avaliar as situações (Atividade "Os filhos de Romeu e Julieta). Provavelmente motivados pela insegurança, os estudantes adotaram novamente um sistema de combinações semelhante ao produto cartesiano, no entanto, passaram a utilizar os valores em sequência crescente, dificultando o esquecimento ou a repetição de alguma combinação, aproximando-se assim do esgotamento das combinações.

Apesar das dificuldades apresentadas, os estudantes demonstraram adotar a concepção intuitiva para avaliar as informações com base nas suas experiências. Por outro lado, percebemos um avanço no registro dos mapeamentos das duplas, embora utilizando a mesma estratégia de combinação, os estudantes passaram a seguir as ordens crescentes das numerações, e quando não encontraram todas as combinações, se aproximaram do esgotamento.

Diante destes resultados, acreditamos que os objetivos traçados pelas atividades deste ciclo foram atingidos, pois diante de situações aleatórias os estudantes conseguiram identificar os eventos impossíveis e os que possuíam melhor chance, bem como relacionar os dados obtidos de forma experimental com as informações obtidas pelo mapeamento do espaço amostral, descrevendo e quantificando corretamente as possibilidades.

4.3 Terceiro Ciclo do Design: Quantificação e Comparação de Probabilidade

Neste ciclo, buscamos proporcionar aos estudantes situações que os levaram a descrever o espaço amostral de possibilidades e a quantificar as probabilidades dos eventos apresentados. Tendo como objetivo levar os estudantes a calcular probabilidades de dados eventos utilizando o conceito frequentista e clássico de probabilidade e a comparar e avaliar as chances entre estes eventos, inferindo sobre o que possuía a melhor chance e ocorrer, por meio da comparação entre as razões de probabilidade.

Atividade: Clube de danças

Esta atividade foi retirada de Nunes et al. (2012), e a partir dela buscamos dar continuidade ao segundo ciclo do *design*, porém conectando com a quantificação da probabilidade, como podemos observar na figura 7. Deste modo, os estudantes mapearam o espaço amostral, identificando os elementos dos eventos solicitados pela atividade e quantificaram esta probabilidade por meio do significado clássico de probabilidade ou laplaciano, em uma razão.

Figura 7 – Atividade Clube de Danças

1. Você consegue verificar:

a) Quais são as possibilidades de casais a serem formados no sorteio?

b) Qual número de danças que serão executadas?

c) Quantas vezes cada pessoa dança?

d) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por casais cujos nomes começam ambos com a mesma letra?

e) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por um casal que ambos estejam vestidos de vermelho?

f) Qual é a probabilidade de se retirar o primeiro par de dançarinos com Billy no par?

Fonte: Adaptado de Nunes et al. (2012).

No item 'a', os estudantes precisaram descrever todos os diferentes casais que poderiam ser formados. O estudante E a princípio observou apenas os casais que apareceram lateralmente a imagem, esquecendo o casal que apareceu acima do texto (Amy e Dan), a própria observação já feita no texto que havia 5 homens e 5 mulheres. A mesma dúvida também foi apresentada pelo estudante C.

> E: É quantas combinações? São 16, né?
> Professor: Não, são mais.
> E: Como é mais? Quatro vezes quatro Indaclécio [professor]?
> Professor: Mas tem quantos homens e quantas mulheres?
> A: Cinco cada um.
> E: Eu não tinha visto esses daqui não. Estava contando sem eles.
> C: Conta com esses também? Professor: Sim.

Sanadas as dúvidas e esclarecidos após a releitura do problema coletivamente, todos os estudantes responderam o item 'a' corretamente apresentando as combinações. Para isso, eles escolheram um dançarino e variaram a dançarina, escrevendo por completo o nome dos dançarinos. E como podemos perceber em suas falas, os alunos fizeram uso do princípio multiplicativo para quantificar as combinações. Resultados semelhantes também são observados na pesquisa Tonouti (2013), que utilizou uma adaptação da mesma atividade.

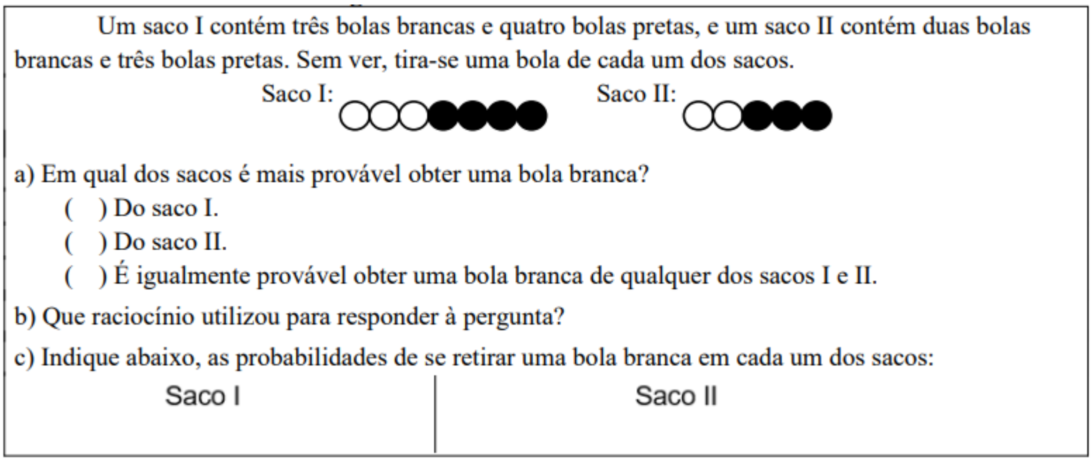
Nos demais itens, os estudantes responderam corretamente. Apontando o número de danças executadas por casais diferentes e por cada pessoa, bem como reconhecer os elementos no espaço amostral e quantificar os eventos solicitados e respondê-los corretamente. Resultados também semelhantes são apresentados por Carvalho (2017).

Os resultados encontrados com esta atividade atendem aos objetivos propostos para ela, pois os estudantes conseguiram mapear o espaço amostral, bem como identificar os elementos dos eventos solicitados e quantificar estas probabilidades em uma razão.

Atividade: Bolinhas no saco

Esta atividade foi desenvolvida por Fernandes (1999) (figura 8), e permitiu aos estudantes comparar duas probabilidades de mesmo evento (retira uma bola branca) examinando dois espaços amostrais distintos. Para isso os estudantes precisaram analisar a razão de probabilidade.

Figura 8 – Atividade Bolinhas no saco



Um saco I contém três bolas brancas e quatro bolas pretas, e um saco II contém duas bolas brancas e três bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: Saco II:

a) Em qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

( ) Do saco I.

( ) Do saco II.

( ) É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

b) Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

c) Indique abaixo, as probabilidades de se retirar uma bola branca em cada um dos sacos:

Saco I	Saco II

Fonte: Adaptado de Fernandes (1999).

No item ‘a’, as duplas responderam corretamente optando pelo saco I. E no item ‘b’, com justificativas semelhantes para explicar que saco teria a melhor chance, os estudantes D e E responderam: “*Porque no saco I tem mais bolinhas brancas*”.

As respostas apresentadas demonstram que os alunos apresentaram a concepção intuitiva de probabilidade (BATANERO, 2005), utilizando como fundamento a situação de maior quantidade, ou seja, o saco que possuía mais bolas brancas, desconsiderando a quantidade de bolas existentes em cada saco. E foi analisando a quantidade de bolas no saco que a outra dupla tomou sua decisão, embora erradamente.

Ao escolherem o saco II, os estudantes C e F falaram: *“Porque a quantidade de bolas era menor e tinha a maior chance de escolher uma bola branca*”. Embora o estudante C tenha identificado ainda no item ‘b’ a probabilidade dos eventos dizendo que “a probabilidade ficaria sendo três de sete, e dois de cinco” (C) (probabilidades dos sacos I e II respectivamente), a dupla C e F deduz que quanto menos bolas tiverem no saco, maior a chance de retirar uma bola branca e quantos mais bolas tiver no espaço amostral, pior seriam estas chances.

Isso demonstra a importância de encontrar o valor da probabilidade em um número decimal para que o aluno compreenda e compare com autonomia as probabilidades, visto que não se deve levar apenas em consideração o número de elementos do evento e nem o número de elementos do espaço amostral. Dados semelhantes são observados por Fernandes (1999) em sua pesquisa, onde percebe que os estudantes incialmente costumam recorrer as maiores quantidades com maior frequência, no entanto com as variações dos problemas os estudantes passam a analisar os problemas, quantificando e comparando as probabilidades, acertando com maior frequência.

Deste modo, no item ‘c’, os estudantes tiveram que encontrar a razão de probabilidade de cada saco e calcular o valor por meio da divisão. No início, os estudantes calcularam a divisão manualmente, e depois puderam conferir o cálculo com auxílio de uma calculadora. Todos os estudantes responderam corretamente, comparando qual das razões apresentavam a maior probabilidade e identificaram se tratar do saco I.

No desenvolvimento deste ciclo, os estudantes apresentaram apenas dificuldades com relação a pequenas interpretações, para identificação do número de pessoas na atividade do “Clube de danças”, por outro lado, a tomada de decisões com relação a quantidades de bolas na atividade “Bolinhas no saco”, demonstra as concepções intuitivas dos estudantes, baseadas nas suas experiências e na lógica sugestiva de maior probabilidade dado o maior número de elementos, o que permite aos estudantes inferir corretamente na maioria das vezes.

Diante desses resultados, acreditamos que os objetivos propostos para as atividades deste ciclo foram alcançados, pois os estudantes conseguiram quantificar a probabilidade em um número racional, dada pela razão em uma fração e em um número decimal, bem como comparar as duas probabilidades examinando o espaço amostral e o evento apresentado a eles, após a comparação puderam optar e inferir sobre o que possuía melhor chance de sair uma bola branca utilizando a razão por meio da divisão.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento desta ecologia de aprendizagem, baseada na teoria *Design Experiments*, possibilitou aos estudantes resolveram problemas de caráter probabilístico em cada ciclo, envolvendo os conceitos de Aleatoriedade, Espaço Amostral e Quantificação e Comparação de Probabilidades, de acordo com as demandas cognitivas essenciais para a compreensão da Probabilidade.

Durante a aplicação do design, os estudantes apresentaram dificuldades para explicar o raciocino que utilizaram, ou seja, porque responderam daquela forma, mas fazendo corretamente diante das atividades do primeiro ciclo. Os estudantes também apresentaram dificuldades em articular e variar estratégias para representação das possibilidades do espaço amostral no segundo ciclo, e dificuldades em comparar as probabilidades em um número decimal no terceiro ciclo, devido à divisão da razão.

No entanto, com o desenvolvimento das atividades dos ciclos, percebemos que os estudantes envolvidos apresentam ideias intuitivas, geralmente baseadas nas suas experiências adquiridas no contexto escolar e principalmente fora dele, conseguindo compreender a natureza aleatória em situações não determinísticos, bem como reconhecendo padrões e apontando possíveis resultados de situações determinísticos, empregando palavras de um vocabulário probabilístico para fortalecer as justificativas apresentadas.

Como um dos fatores que contribuíram para a participação e compreensão dos estudantes, acreditamos que os recursos e as atividades empregadas contribuíram para o desenvolvimento de significados com relação aos conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e a quantificação e comparação de probabilidades. Uma vez que estes instrumentos possibilitaram aos envolvidos, análises das atividades, gerando discussão de opiniões referente aos problemas envolvidos com base na natureza probabilística dos problemas.

Neste sentido, o design da Ecologia de Aprendizagem sobre probabilidade, mostrou-se uma importante ferramenta, por apresentar subsídios necessários para identificar os conceitos que os estudantes compreenderam e quais apresentaram dificuldade, com base nas suas respostas verbais, escritas e nas estratégias para soluções das atividades, o que permite ao professor adotar novas estratégias, atividades e recursos necessários com foco na melhoria da aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 8, n. 3, México, p. 247–263, 2005.

BORBA, R. E. de S. et al. Educação estatística no ensino básico: currículo, pesquisa e prática em sala de aula. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, (EM TEIA), Recife: EM TEIA/EDUMATEC, v. 2, n. 2, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**, 5ª A 8ª SÉRIE. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, p. 148, 1998.

BRASIL. Mistério da educação. **Base Nacional Comum Curricular**, Educação é a base. Brasília: MEC, 600p, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 18 fev. 2017.

BROWN, A. L. Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. **The Journal of the Learning Sciences**, University of California - Berkeley, v. 2, n. 2, p. 141–178, 1992.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's Understanding of Probability**: a literature review. [S.l.: s.n.], 2012. 86 p. Disponível em: <http://www.nuffieldfoundation.org/news/childrens-understanding-probability>. Acesso em: 18 ago. 2017. ISBN 978-0904956863.

CAMPOS, T.; CARVALHO, J. I. F. de. Probabilidade nos anos iniciais da educação básica: contribuições de um programa de ensino. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, – Em Teia, Recife, PE, v. 7, n. 1, 2016.

CARVALHO, J. I. F. de. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de Probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN, São Paulo, 2017.

COBB, P. et al. Design experiments in educational research. **Educational researcher (AERA)**, Cambridge Univ Library – AERA, Washington, Jan./Feb., v. 32, n. 1, p. 9–13, 2003.

COUTINHO, C. de Q. e S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, REVEMAT: UFSC, v. 2, n. 1, p. 50–67, 2007.

FERNANDES, J. A. da S. **Intuições e aprendizagem de probabilidades**: uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade. 1999. Tese (Doutorado em Metodologia do Ensino da Matemática) — Universidade do Minho, Braga, 1999.

JOLLIFFE, F. Assessing probabilistic thinking and reasoning. *In*: JONES, Graham A. (Ed.). **Exploring Probability in School**: Challenges for teaching and learning. New York: Springer, 2005. p. 325–344. ISBN 0-387-24529-4.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KATAOKA, V. Y. Passeios aleatórios da carlinha: uma atividade didática para o ensino de probabilidade. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL - ERMACC, 1., 2010, São João del-Rei. **Anais [...]**. São Carlos: SBMAC, 2010. p. 26–35.

LOPES, C. A. E. A probabilidade e a Estatística no Currículo de Matemática do Ensino Fundamental Brasileiro. *In*: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL: EXPERIÊNCIAS E PERSPECTIVAS DO ENSINO DA ESTATÍSTICA - Desafios para o século XXI, 1999 Florianópolis. **Anais [...]**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 1999. p. 167–174.

NUNES, T. et al. **Teaching primary school children about probability**. Teacher Handbook. Departamento de Educação, Universidade de Oxford. [CD-ROM], 2012.

OLIVEIRA, S. A. de; CAZORLA, I. M. Ensinando probabilidades no ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 24, n. 13, p. 3–6, 2008.

PIETROPAOLO, R. C. et al. Conhecimentos de professores para ensinar probabilidade nos anos finais do ensino fundamental. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática - JIEEM**, v. 8, n. 3, p. 126–156, 2014. Disponível em: <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/3044>. Acesso em: 13 ago. 2017.

SANTOS, J. A. F. L. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade São Francisco, Itatiba/SP, 2010.

SANTOS, J. A. F. L. **A produção de significações sobre Combinatória e Probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. 2015. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

SILVA, L. B. da. **A estatística e a probabilidade nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

TONOUTI, R. R. **Avaliação de um programa de ensino para aprendizagem de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2013.