A B A K Ó S
PUC Minas
Instituto de Ciências Exatas e Informática

Modelo de Beverton-Holt: Estudo do Comportamento Assintótico Usando a Monotonia de Sucessões Definidas por Recorrência*

Beverton-Holt Model: Study of Asymptotic Behavior using Monotony of Succession Defined by Recurrence

Augusto Veríssimo Victor dos Santos[1]
Bartolomeu Chindumbo Delfino[2]
Justo Cassinda Victor dos Santos[3]

Resumo

Neste artigo apresentamos o resultado de um trabalho desenvolvido com um grupo de estudantes do primeiro ano do curso de Aquicultura da Faculdade de Medicina Veterinária da Universidade José Eduardo dos Santos, Huambo (Angola). O objetivo do trabalho é desenvolver habilidades em ferramentas para a solução e interpretação de exercícios relacionados a modelos ecológicos unidimensionais. Especificamente, o trabalho culminou na resolução metodológica de problemas com o modelo de Beverton-Holt.

Palavras-chave: Modelo de Beverton-Holt. Órbita. Ponto de equilíbrio. Sucessões por recorrência.

*Submetido em 28/07/2020 - Aceito em 01/10/2021

[1]Universidade José Eduardo dos Santos - Ciências de Base - Huambo, Angola – victor.santos@ubi.pt; nundasantos@hotmail.com
[2]Instituto Superior de Ciências da Educação do Huambo, Ensino da Matemática, Angola – delfinomano27@gmail.com
[3]Universidade José Eduardo dos Santos - Ciências de Base - Huambo, Angola – cassinda2012@gmail.com

Abstract

In this paper, we present the results of an investigation involving a group of students in the first year of the Aquaculture course of the Faculty of Veterinary Medicine at the José Eduardo dos Santos University in Huambo (Angola). The goal is the development of skills to work with tools to solve and interpret exercises related to one-dimensional ecological models. Specifically, the work culminated into methodological problem solving using the Beverton-Holt model.

Keywords: Beverton-Holt model. Orbit. Equilibrium point. Recurrence successions.

1 INTRODUÇÃO

Os modelos ecológicos descrevem a dinâmica de uma população que habita em um ecossistema em um período determinado. Estudar os modelos ecológicos unidimensionais em tempo discreto, segundo Rosa (2006), consiste em medir o tamanho de uma população em diferentes instantes de tempo de acordo com os parâmetros que determinam a natalidade, a longevidade e a mortalidade. No ensino universitário, onde um dos focos principais é o trabalho com espécies que habitam em ecossistemas determinados com interação intra e inter-específica, são estudados modelos ecológicos que favorecem o estudo da dinâmica das populações, Angelini (1999).

Na perspectiva de Kimmins (2004) confirmado por Santos (2018), os modelos ecológi-cos podem assumir muitas formas quando são usados como uma ferramenta para compreender sistemas complexos, estando o grau de complexidade dependente do objetivo pelo qual o mo-delo foi desenvolvido. Quanto mais simples forem os modelos, mais facilmente as teorias ou políticas de gestão que se propõem a ser estudadas podem ser detalhadas e testadas.

Existem vários modelos ecológicos, entre os quais salientamos o modelo de Malthus de 1798 que prevê o crescimento de peixes, o modelo de Lotka-Volterra de 1925 de presa - predador de espécies de peixes que habitam no mesmo ou em ecossistemas diferentes e o modelo de Von Bertalanffy muito utilizado para o crescimento de espécies de peixes. Ainda existem os modelos ecológicos clássicos, tais como: o modelo de Ricker de 1954, Maynard Smith-Slatkin de 1973, Hassel de 1975 e o de Beverton-Holt de 1975 que é parte da linha de investigação deste trabalho.

O levantamento de trabalhos desenvolvidos em Angola, sobre modelos ecológicos nas teses e dissertação de mestrados, mostrou vários modelos que incidem diretamente no crescimento populacional, em particular, o modelo de Beverton-Holt estudado com muita profundidade no trabalho de Santos (2018). Esse modelo de Beverton-Holt foi derivado de uma equação diferencial, resultando numa equação iterativa como sucessão definida por recorrência.

O modelo de Beverton-Holt como sucessão definida por recorrência, para a análise do seu comportamento é necessário que se considere a monotonia, a limitação e a convergência, tendo em conta os valores dos parâmetros ligados a natalidade, a longevidade e a mortalidade.

Por se tratar de um modelo ecológico e muito utilizado na dinâmica das populações, é estudado no 2º ano do curso de Aquicultura da Faculdade de Medicina Veterinária do Huambo, como aplicação no estudo da dinâmica das diferentes espécies de peixes nos rios e lagos ao redor da província ou nos locais que servem de prática de campo para o aperfeiçoamento da aprendizagem. Para trabalhar com esse modelo os estudantes são capacitados com conhecimentos de base sobre sucessões definidas por recorrência.

A experiência dos autores como professores de Matemática neste curso há 15 anos, associada ao resultado das avaliações das observações das aulas dos cursos anteriores, permitiu fazer um estudo exploratório que revelou a insuficiência de procedimentos de solução de problemas que envolvem sucessões definidas por recorrência.

Esses procedimentos estão ligados a análise da monotonia, limitação e o comportamento da convergência, como condições necessárias para trabalhar com o modelo de Beverton-Holt como sucessão definida por recorrência.

Assim sendo, selecionou-se um grupo de estudantes com bom aproveitamento para se fazer o estudo. Nesse ínterim, este trabalho objetiva dotar os estudantes com ferramentas que os ajudem a resolver e interpretar problemas relacionados com o modelo, através de estratégias de aprendizagem que favorecem a demonstração a partir de conteúdos conceituais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo bibliográfico foi baseado nos conceitos e definições, teoremas e suas interpretações ligados ao estudo do comportamento assintótico das equações de diferenças que são sucessões definidas por recorrência, necessárias para aplicação e estudo do modelo de Beverton-Holt. Mas, não se demonstra a derivação do modelo conforme Santos (2018), apenas fez-se a apresentação do modelo e seus pontos fixos, facilitando assim a compreensão dos estudantes.

Assume-se a definição de equações de diferenças de primeira ordem apresentada por Luís (2006) como

$$x_{n+1} = f(n, x_n) \tag{1}$$

onde f é uma dada função. Se f for da forma $f(n,x) = g(x)$ (ou seja, f não depende explicitamente de n), a equação é autônoma, caso contrário é não-autônoma.

Nesta perspectiva, o modelo de Beverton-Holt é uma equação autônoma, onde a mortalidade acontece de forma natural sem a influência de fatores externos e assume-se que os nascimentos ocorrem no final de cada período.

O modelo de Beverton-Holt é apresentado em diferentes formas nos artigos de Berezansky e Baverman (2004), Rosa (2006), Bohner e Warth (2007), La Sen (2008), Quan Sun e outros (2008) e Santos (2018) com as demonstrações e derivação do modelo com procedimentos diferentes e parâmetros congruentes que facilitam o seu estudo. Porém, atendendo a realidade angolana e os conhecimentos de base dos estudantes do 1º ano da Faculdade de Medicina Veterinária do Huambo, foi selecionado o modelo de Beverton-Holt apresentado por Santos (2018) por ter uma forma mais simplificada que corresponde com o nível dos estudantes, e que foi derivado a partir de pressupostos biológicos que descrevem a evolução no tempo do número de indivíduos de uma população sob o efeito da mortalidade dada pela seguinte equação diferencial

$$N' = -\mu(N)N, \tag{2}$$

onde N designa o número de indivíduos da população e μ é a taxa de mortalidade a que a população está sujeita.

Discretizando desta forma a equação e considerando o período $]n, n+1[$, obtém-se o modelo de Beverton-Holt, sendo $c > 0, k > 0$ e n um número natural:

$$x_{n+1} = f(n, x_n) = \frac{kx_n}{1 + cx_n}, \tag{3}$$

Assim, k representa a taxa de natalidade, e c representa a taxa de mortalidade da população.

Essa equação pode ser interpretada como ferramenta que permite estudar a evolução dos estados de um sistema por aplicação sucessiva de uma lei, dada pela função f que permanece imutável ao longo do tempo. Mais concretamente, dado um estado inicial do sistema, $x_0 \in X$, podemos obter os estados restantes aplicando f sucessivamente:

$x_1 = f(x_0)$
$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$
$x_3 = f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0)$
$x_k = f(x_{k-1}) = f(f(\cdots f(x_0)\cdots)) = f^k(x_0)$
onde se usa a notação $f^k = fofo...of$ (k vezes)

O estudo matemático do modelo obtido centra-se na discussão do comportamento assintótico das soluções, recorrendo aos resultados estudados anteriormente.

Uma sequência $(x_n)_{n\in N_0}$ (onde N_0 representa o conjunto dos números naturais incluindo zero) representada simplesmente por (x_n), o primeiro termo será sempre x_0, isso é, começará sempre no tempo $n = 0$, onde esse tempo inicial representa a população a ser contada no instante inicial. Não se pode confundir que para $(x_n)_{n\in N_0}$ se $n = 0$ então $(x_0) = 0$. Essa conclusão nunca é verdadeira, visto que a população inicial para este modelo tem de ser sempre maior do que zero, ou seja, $(x_n)_{n\in N_0} > 0$, isto é, a população terá sempre indivíduos para garantir a continuidade da espécie, então a sucessão deve ser monótona aproximando-se a um ponto de equilíbrio do modelo.

Nas equações de diferenças autônomas (1), os pontos fixos da função f são fundamentais uma vez que estão associados às soluções constantes da equação, sendo que um ponto $x_p \in X$ é um *ponto fixo* da função $f : X \to X$ se $f(x_p) = x_p$.

Note-se que, se x_p é um ponto fixo da função f em (1), então, para todo o k sendo um número natural,

$$f^k(x_p) = f^{k-1}(f(x_p)) = f^{k-1}(x_p) = \cdots = x_p.$$

Assim, se $x_p \in X$ é um ponto fixo da função f em (1), e por definição, a órbita positiva de x_p é $\mathcal{O}^+(x_p) = \{x_p\}$, um ponto fixo de f, x_p, é chamado de *ponto de equilíbrio* da equação (1).

Um ponto de equilíbrio x_p da equação (1) diz-se

1. *Estável*, se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda a condição inicial x_0, sendo n um número natural,

$$|x_0 - x_p| < \delta \;\Rightarrow\; |f^n(x_0) - x_p| < \varepsilon.$$

2. *Semi-estável à direita* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda a condição

inicial x_0, sendo n um número natural,

$$0 < x_0 - x_p < \delta \ \Rightarrow \ |f^n(x_0) - x_p| < \varepsilon.$$

3. *Semi-estável à esquerda* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda a condição inicial x_0, sendo n um número natural,

$$-\delta < x_0 - x_p < 0 \ \Rightarrow \ |f^n(x_0) - x_p| < \varepsilon.$$

4. *Instável* se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $\delta > 0$, existe uma condição inicial x_0, sendo n um número natural, tal que $|x_0 - x_p| < \delta$ e $|f^n(x_0) - x_p| > \varepsilon$.

5. *Atrator* se existe $\eta > 0$ tal que, para toda a condição inicial x_0 temos

$$|x_0 - x_p| < \eta : \ \lim f^n(x_0) = x_p.$$

6. *Globalmente Atrator em* A se para toda a condição inicial x_0 tal que $x_0 \in A$ temos $\lim f^n(x_0) = x_p$.

7. *Assintoticamente estável* se for estável e atrator.

8. *Globalmente assintoticamente estável em* A se for estável e globalmente atrator em A.

O Teorema 9.7 de Thieme (2003) permite concluir sobre a estabilidade local do ponto fixo da equação (3) e já foi demonstrado por Santos (2018, p. 18).

Dada uma função $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, consideremos a equação $x_{n+1} = f(x_n)$ e suponhamos que:

a) f é contínua;

b) f e f^2 têm no máximo um ponto fixo;

c) $x \mapsto f(x)/x$ é estritamente decrescente.

Então, verificam-se as seguintes afirmações:

1. se $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \geq 1$ todas as soluções da equação divergem para ∞;

2. Se $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} \leq 1$ todas as soluções da equação convergem para zero;

3. se $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} < 1 < \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$, existe um único ponto fixo de f que é globalmente atrator.

2.1 Pontos de equilíbrio do modelo de Beverton-Holt

O modelo de Beverton-Holt possui os seguintes pontos de equilíbrio:

$$x^* = 0; \quad \text{população instavel,}$$
$$x^* = \frac{k-1}{c} \quad \text{população estavel.}$$

Consideremos as seguintes hipóteses:

1. se $k \leq 1$, todas as soluções $x(t)$ da equação (3) com $x(0) = x_0 > 0$ convergem para zero, isto é, o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ é globalmente atrator.

2. se $k > 1$, existe um ponto de equilíbrio, $x^{**} = (k-1)/c$, para o qual convergem todas as soluções $x(t)$ da equação (3) com $x(0) = x_0 > 0$, isto é, o ponto de equilíbrio

   $x^{**} = (k-1)/c$ é globalmente atrator em $]0, +\infty[$.

Na perspectiva de Delfino *et al.* (2018) e Ghelli *et al.* (2015) a monotonia é a variação do crescimento ou decrescimento de uma sucessão. As condições dos parâmetros dados pelo modelo de Beverton-Holt, observa-se a monotonia para os respectivos pontos de equilíbrio:

a) Para $k \leq 1$ a monotonia é apenas decrescente visto que o comportamento dos pontos convergem para o ponto de equilíbrio $x^* = 0$, isto é, para qualquer população inicial. Aqui observa-se a extinção da população.

b) Para $k > 1$ a monotonia tem duplo comportamento, ou seja, é crescente e decrescente ao mesmo tempo, isto é, a monotonia cresce até ao ponto de equilíbrio $x^{**} = (k-1)/c$ para qualquer valor da população inicial inferior ao da população de equilíbrio e decresce para o mesmo ponto de equilíbrio para qualquer valor inicial que seja superior ao da população de equilíbrio. Aqui consegue-se observar a persistência da população.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente estudo focalizou-se na metodologia qualitativa, em uma abordagem descritiva, do tipo exploratório, que incidiu na avaliação do conhecimento de um grupo de estudantes da Faculdade de Medicina Veterinária no curso de Aquicultura. De acordo Selltiz *et al.* (1974), a pesquisa qualitativa exploratória garante maior familiaridade com o fenômeno em estudo descobrindo dessa feita as soluções de acordo as ideias implementadas para o efeito. Na mesma senda, Coutinho (2018) ao referir-se sobre o paradigma qualitativo salienta que se trata de investigar ideias, de descobrir significados nas ações individuais e nas interações sociais a partir da perspectiva dos atores intervenientes no processo. Essa ideia corroborada por Freita e Jabbour (2011).

O tema em estudo faz parte das linhas de investigação da universidade referida e é pouco estudado. A fase exploratória onde se procura um entendimento geral do problema, definindo o foco, as prioridades da abordagem e descobrir as caraterísticas sobre o tema, as quais não se tem domínio, Zanelli (2002) e Coutinho (2018) salientam que, por decorrência da escassez e de estudo a respeito de uma problemática deve fazer-se um estudo exploratório, assim procura-se aumentar o conhecimento sobre o tema através da observação da resolução das tarefas orientadas aos estudantes. A observação consiste no registro de unidades de interação numa situação social bem definida, com base ao que o observador consegue ver e ouvir. Mediante ela o pesquisador é capaz de registrar em documentos as atividades, atitudes, comportamentos sem depender da ajuda de terceiros. Ela é muito usual na recolha de dados (COUTINHO, 2018).

Neste trabalho, utilizou-se a observação para recolher dados de como os estudantes resolvem problemas ligados ao modelo ecológico de Beverton-Holt, descrevendo seus principais procedimentos, analisar sua solução, encontrar os erros e procurar saná-los. Esse método permitiu a utiização de outra estratégia de recolha de dados, que é o *Focus Group*, traduzindo em português por Grupos de Enfoque ou Grupos Focais, nada mais é do que uma entrevista realizada a um grupo de sujeitos. Para Morgan e Spanish (1984) trata-se de uma estratégia de recolha de dados que tem objetivos muito específicos e por isso deve ser considerada como uma técnica autônoma para a recolha de dados. De fato, tal como referem Teddie e Tashakorri (2009) o *Focus Group* combina a entrevista e a observação, já que, embora muito semelhante à entrevista - o investigador coloca aos entrevistados uma série de perguntas pré-determinadas - pelo simples fato de envolver um grupo, as interações que se estalelecem entre os participantes são uma importante fonte de informação para a recolha de dados.

Neste trabalho, a estratégia de recolha de dados *Focus Group*, visou explorar percepções, experiência do grupo de estudantes do 1º ano do curso de Aquicultura da Faculdade de Mediciana Veterinária da Universidade José Eduardo dos Santos ao conhecimento do modelo de Beverton-Holt, discutindo em comum as condições necessárias e as condições suficientes para o procedimento de solução dos exercícios ou problemas do estudo do comportamento assintótico, usando a monotonia de sucessões definidas por recorrência.

Os tópicos sobre o tema em referência para melhor discussão e análise foram preparados com antecipação pelos autores do trabalho e fornecidos aos estudantes a tempo oportuno para uma preparação adequada e a busca de mais conhecimento sobre os modelos matemáticos utilizados para a descrição da dinâmica das populações, em particular o modelo ecológico de Beverton-Holt. Foi utilizado também um protocolo semelhante ao de uma entrevista semi-estruturada para favorecer a direção do debate, pois, na perspectiva de Krueger e Casey (2000) o *Focus Group* deve utilizar um protocolo, ser realizado sempre em um ambiente não ameaçador e obedecer os seguintes requisitos:

a) O número ideal de participantes varia entre 5 e 10;

b) A composição do grupo deve ser homogênea;

c) Os procedimentos implicam a realização de entrevista ao grupo por um moderador que pode ser acompanhado por um assistente;

d) As sessões não devem exceder duas horas;

e) As sessões devem ser focalizadas num tópico de interesse para o grupo.

Para o efeito, contou-se com 10 participantes, todos eles estudantes do 1º ano. O aproveitamento acadêmico dos mesmos é de uma média curricular de 14 valores. Os procedimentos da realização da entrevista ao grupo contou com um moderador, sendo um dos autores do trabalho, e os outros dois autores como assistentes que acompanharam a entrevista fazendo anotações detalhadas e gravações em vídeo e áudio das respostas que foram dadas pelos participantes do grupo. As sessões não levavam muito tempo, para não cansar os participantes, despertando-lhes assim maior interesse à tarefa com uma abordagem centrada na problemática apresentada no presente trabalho.

Foram realizadas 5 sessões de debates com o grupo e nas 3 primeiras sessões em cada uma abordou-se um problema relacionado com a fundamentação das condições necessárias, condições suficientes para o procedimento de solução do problema que conduz a prova da monotonia, estudo comportamental da sucessão quanto a existência do supremo e ínfimo, bem como sua convergência a um ponto fixo de acordo as condições dos parâmetros. Nas duas últimas sessões foram analisadas opiniões ligadas aos procedimentos de solução tendo em conta os conceitos sobre sucessão, monotonia, limite, convergência bem como os teoremas e propriedades relacionados a temática em estudo nas seguintes questões:

1. Como analisam a linguagem apresentada no problema?

2. Identificam o que se solicita e o que se pretende encontrar, ou seja, o dado e o buscado?

3. Como relacionam os conhecimentos associados ao problema com os que já possuem?

4. Podem identificar uma contradição caso exista no enunciado do problema?

5. Do conhecimento obtido na pesquisa sobre o tema, podem selecionar no problema o que se sabe, o que se necessita para inferir a condição necessária, condição suficiente para o procedimento de solução?

6. Existe uma insuficiência no conhecimento que tens para inferir o que lhe solicitam?

7. Podem estabelecer e fundamentar a cadeia de inferência adotada para o procedimento de solução?

8. Podem avaliar e controlar a validez do procedimento de solução?

9. Podem apresentar uma proposta de solução de acordo ao debate aqui realizado?

Para garantir a qualidade do estudo, as anotações feitas durante e depois das três primeiras sessões de trabalho foram reenviadas aos estudantes para verificação e confirmação bem como encontrar outros fundamentos que possam melhorar o tratado. Nessa senda Rehfeldt *et al.* (2019) afirmam que: na Investigação Matemática, o mais importante é o caminho para se chegar a uma expressão/conjectura, isto é, às escritas, enunciações e representações.

As discussões foram processadas através de técnica de análise de conteúdo.

4 RESULTADOS

Depois das cinco sessões de debate com os dez participantes, foram analisadas as respostas das questões previamente determinadas que permitiu a recolha de informação, facilitando a interpretação das percepções e experiência dos participantes no que tange a linguagem matemática, a exigência do problema, os conhecimentos de base associados a ele, as condições necessárias, condições suficientes para o procedimento de solução. Outras interpretações foram extraídas durante a fundamentação de cada um dos participantes em relação ao problema apresentado, foram ainda avaliados e controlados os procedimentos de solução dos problemas relacionados com o modelo na seguinte relação de recorrência

$$x_{n+1} = \frac{kx_n}{1 + cx_n}, \quad n = 0, 1, ...$$

onde x_n é a população no instante ”n” , x_{n+1} é a população no instante ”$n + 1$” sendo que os parâmetros $k > 0$ (natalidade) e $c > 0$ (mortalidade) e que a sucessão $(x_n)_{n \in N_0}$ que é a solução de (3) com x_n correspondente a evolução da população ao longo do tempo e x_0 consiste no número inicial de elementos.

As exigências dos problemas consistiam em:

1. Considere $k < 1$ e $x_0 > 0$. Mostre que a sucessão $(x_n)_{n \in N_0}$

   i) é decrescente;

   ii) é limitada;

   iii) é convergente e $\lim x_n = 0$..

2. Considere $k > 1$ e o ponto $x^* = \frac{k-1}{c}$. Mostre que se $0 < x_0 < x^*$ então a sucessão $(x_n)_{n \in N_0}$

   i) é crescente:

   ii) é limitada;

   iii) é convergente e $\lim x_n = x^*$.

3. Mostre que se $x_0 > x^*$ então a sucessão $(x_n)_{n \in N_0}$

   i) é decrescente:

   ii) é limitada;

iii) é convergente e $\lim x_n = x^*$.

Nas duas últimas sessões de debate que são a quarta e a quinta, depois de analisadas as opiniões ligadas aos procedimentos de solução tendo em conta os conceitos sobre sucessões, limite e monotonia, constaram-se as seguintes insuficiências:

1. Quanto a análise da linguagem apresentada no problema, a maior dificuldade consistiu em relacionar a linguagem comum sobre sucessão com a linguagem mais técnica de sucessão definida por recorrência dificultando assim a compreensão do problema e a identificação com claridade do que se exige. O mesmo resultado é corroborado por Santos e outros (2018) e encontra fundamentos em Davidson *et al.* (2000) ao referir - se que é necessário clarificar com mais amplitude e profundidade as relações dialécticas entre o pensamento, a linguagem matemática e as situações problemáticas cuja resolução implica recursos heurísticos (KRUTETSKII, 1976; BALLESTER *et al.*, 2000)".

2. Segundo Davidson *et al.* (2000), Um dos pressupostos fundamentais ao traçar o plano de solução ou construir a estratégia de solução do problema consiste em identificar uma contradição caso exista no problema, porém, neste trabalho, maior parte dos participantes apontava para uma contradição que estava ligada a busca de contra-exemplo através de um contra-recíproco que apresenta o problema, (ANTIBI, 1990; JIMÉNEZ, 2013).

3. Insuficiência em alguns conhecimentos de base ligado aos conteúdos conceituais sobre sucessão e sucessão por recorrência influenciando assim a relação do que se sabe e do que se necessita para se inferir a condição necessária ou suficiente para o procedimento de solução. Esse resultado coincide com o de Ferrer (2000) e D'ambrósio (2014) na sua tese doctoral, ao abordar sobre a organização do conhecimento matemático. Por outro lado, Rodríguez (1991) salienta que o trabalho com os conceitos e teoremas é a base para um procedimento de solução.

4. Pouca claridade no reconhecimento da aplicação de um procedimento não adequado retardando assim o tempo de prova que tem para a análise e interpretação do modelo que se quer estudar. Para Jiménez (2013) corroborado por Davidson e outros (2000), a aplicação de um procedimento de solução depende da determinação das condições necessárias, condições suficientes para esse procedimento.

5. Apesar dos participantes saberem resolver problemas ligados a monotonia, para este caso em particular apresentaram deficiência na interpretação dos parâmetros k e c, ao identificarem o que se solicita ou o que se pretende encontrar;

6. Ao fundamentar a cadeia de inferência adotada para o procedimento de solução, maior parte dos participantes não buscava conceitos, teoremas, definições e proposições já definidas por alguns autores, apresentando argumentos de sua análise para a resolução do problema. Assim sendo, infere-se também insuficiência ao avaliar e controlar a validez do procedimento de solução.

Avaliadas essas insuficiências, nas últimas duas sessões, depois de analisadas as opiniões ligadas aos procedimentos de solução tendo em conta os conceitos sobre, sucessão, monotonia, limite de sucessão, convergência bem como os teoremas e propriedades relacionados, em unanimidade concluiu-se a solução dos problemas apresentados como se seguem:

1)

Considerando $k < 1$

1.1 Sabemos que $k < 1$. Vamos mostrar por indução que com essa condição a sucessão $(x_n)_{n\in N_0}$ é decrescente.

a) Primeiro precisamos de mostrar que $x_1 - x_0 < 0$.

$$x_1 - x_0 = \frac{kx_0}{1+cx_0} - x_0 = \frac{kx_0 - x_0(1+cx_0)}{1+cx_0} = \frac{x_0(k-1-cx_0)}{1+cx_0}$$

Como $1 + cx_0 > 0$ pois $c > 0$ e $x_0 > 0$, então para a diferença ser negativa, temos que analisar o numerador. Para este ser negativo, isso é, $x_0(k - 1 - cx_0) < 0$, como $x_0 > 0$ é necessário que

$$k - 1 - cx_0 < 0 \Leftrightarrow k < 1 + cx_0$$

Como $k < 1$ por hipótese, $x_1 - x_0 < 0$ verifica-se sempre.

b) Agora precisamos de mostrar que se $x_{n+1} - x_n < 0$ então $x_{n+2} - x_{n+1} < 0$ para todo o $n > 1$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{kx_{n+1}}{1+cx_{n+1}} - \frac{kx_n}{1+cx_n} = \frac{k(1+cx_n)x_{n+1} - kx_n(1+cx_{n+1})}{(1+cx_{n+1})(1+cx_n)}$$

Como o denominador é positivo, então, vamos analisar o numerador.

$$\begin{aligned} k(1+cx_n)x_{n+1} - kx_n(1+cx_{n+1}) &= kx_{n+1} + kcx_nx_{n+1} - kx_n - ckx_nx_{n+1} \\ &= k(x_{n+1} - x_n). \end{aligned}$$

Como por hipótese $x_{n+1} - x_n < 0$, temos $x_{n+2} - x_{n+1} < 0$. Portanto a sucessão é decrescente. Aqui existe extinção da população à medida que o tempo vai passando.

1.2 Agora precisamos de mostrar que a sucessão é limitada, isto é, apoiando-se aos pressupostos da Análise Matemática, existe um a e um b tais que $a < x_n < b$ para todo o $n \in N_0$.

Pela alínea anterior, provou-se que a sucessão x_n é monótona decrescente, isso é: para todo o n temos:

$$\cdots < x_{n+2} < x_{n+1} < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0,$$

ou seja, o majorante desta sucessão é x_0 e o minorante é 0. Assim $0 < x_n < x_0$ para todo o $n \in N$ e a sucessão é limitada, ou seja, se a população inicial é maior, então para qualquer população que surja ao longo do tempo será sempre inferior tornando cada vez menor aproximando-se de zero, ou seja, ela vai se extinguir também.

1.3 Assume-se que toda a sucessão monótona e limitada é convergente. Uma vez que, de acordo com as alíneas anteriores, (x_n) é monótona e limitada, concluímos que é convergente. Consideremos a hipótese de que duas sequências x_n e x_{n+1} no limite convergem para o mesmo ponto de equilíbrio, e seja "E" este ponto de equilíbrio. Assim, como $E = \lim x_n$, então $\lim x_{n+1} = \lim x_n = E$, e concluímos que da equação (3)

$$E = \lim x_{n+1} = \frac{k \lim x_n}{1 + c \lim x_n} = \frac{kE}{1 + cE} \quad \Leftrightarrow \quad E(1 + cE - k) = 0 \Leftrightarrow \quad E = 0 \ \vee \ E = \frac{k-1}{c} \quad (4)$$

Logo, como $k < 1$, temos $\frac{k-1}{c} < 0$ e concluímos que não é este o limite que se procura. Portando $\lim x_n = 0$.

2)

Considerando $k > 1$ temos:

2.1 Sabemos que $k > 1$ e $x_0 < x^* = \frac{k-1}{c}$.

i) Vamos mostrar por indução que com estas condições a sucessão $(x_n)_{n \in N_0}$ é crescente.

- Primeiro precisamos de mostrar que $x_1 - x_0 > 0$.

$$x_1 - x_0 = \frac{kx_0}{1 + cx_0} - x_0 = \frac{kx_0 - x_0(1 + cx_0)}{1 + cx_0} = \frac{x_0(k - 1 - cx_0)}{1 + cx_0}$$

Como $1 + cx_0 > 0$ pois $c > 0$ e $x_0 > 0$, então para a diferença ser positiva, temos que analisar o numerador. Para este ser positivo, isso é, $x_0(k - 1 - cx_0) > 0$, como $x_0 > 0$ é necessário que

$$k - 1 - cx_0 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 < \frac{k-1}{c} = x^*$$

Que é o que temos por hipótese.

- Agora precisamos de mostrar que se $x_{n+1} - x_n > 0$ então $x_{n+2} - x_{n+1} > 0$ para todo o $n > 1$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{kx_{n+1}}{1 + cx_{n+1}} - \frac{kx_n}{1 + cx_n} = \frac{k(1 + cx_n)x_{n+1} - kx_n(1 + cx_{n+1})}{(1 + cx_{n+1})(1 + cx_n)}$$

Como o denominador é positivo, vamos analisar se o numerador também é. Temos

$$\begin{aligned} k(1 + cx_n)x_{n+1} - kx_n(1 + cx_{n+1}) &= kx_{n+1} + kcx_nx_{n+1} - kx_n - kx_nx_{n+1} \\ &= k(x_{n+1} - x_n) \end{aligned}$$

Como por hipótese $x_{n+1} - x_n > 0$, para $k > 0$ temos $x_{n+2} - x_{n+1} > 0$. Portanto a sucessão é crescente.

ii) Para mostrar que a sucessão é limitada, precisamos de encontrar um a e um b tais que $a < x_n < b$ para todo o $n \in N_0$.

Pela alínea anterior, provou-se que a sucessão x_n é monótona crescente, isto é: para todo o $n \in N_0$ temos:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots .$$

Como $x_0 < x_n$ para todo o $n \in N_0$, zero é um minorante. Por outro lado, como a sucessão é crescente, temos para todo o $n \in N_0$

$$x_{n+1} - x_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_n(k - (1 + cx_n))}{1 + cx_n} > 0$$

Como já foi visto anteriormente, $x_n > 0$ e $1+cx_n > 0$ logo para a expressão anterior ser positiva $k - (1 + cx_n) > 0$. Mas isso implica

$$x_n < \frac{k-1}{c}, \forall n \in N_0$$

ou seja, x^* é um majorante para esta sucessão. Assim $x_0 < x_n < x^*$ para todo o $n \in N$.

iii) Pelas alíneas anteriores, a sucessão (x_n) é monótona e limitada e logo é convergente. Seja $\lim x_n = E$. Uma vez que $\lim x_{n+1} = \lim x_n = E$, temos, tal como em (5), $E = 0 \vee E = \frac{k-1}{c} = x^*$. Como $E \geq x^* > 0$, o limite não pode ser 0 e temos nesse caso $E = x^*$ (note-se que $k - 1 > 0$ também nesse caso).

3)

Considerando $k > 1$ e $x_0 > x^*$

Sabemos que $k > 1$ e $x_0 > x^* = \frac{k-1}{c}$.

i) Vamos mostrar por indução que com estas condições a sucessão $(x_n)_{\{n \in N_0\}}$ é decrescente.

- Primeiro precisamos de mostrar que $x_1 - x_0 < 0$.

$$x_1 - x_0 = \frac{kx_0}{1 + cx_0} - x_0 = \frac{kx_0 - x_0(1 + cx_0)}{1 + cx_0} = \frac{x_0(k - 1 - cx_0)}{1 + cx_0}$$

Como $1 + cx_0 > 0$ pois $c > 0$ e $x_0 > 0$, então para a diferença ser negativa, temos que analisar o numerador. Para esse ser negativo, isto é, $x_0(k - 1 - cx_0) < 0$, como $x_0 > 0$ é necessário que

$$k - 1 - cx_0 < 0 \Leftrightarrow x_0 > \frac{k-1}{c} = x^*,$$

que é o que temos por hipótese.

Agora precisamos de mostrar que se $x_{n+1} - x_n < 0$ então $x_{n+2} - x_{n+1} < 0$ para todo o $n > 1$. Temos

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{kx_{n+1}}{1 + cx_{n+1}} - \frac{kx_n}{1 + cx_n} = \frac{k(1 + cx_n)x_{n+1} - kx_n(1 + cx_{n+1})}{(1 + cx_{n+1})(1 + cx_n)}.$$

Como o denominador é positivo, para a expressão anterior ser negativa, o numerador tem de ser negativo. Verifica-se

$$\begin{aligned} k(1 + cx_n)x_{n+1} - kx_n(1 + cx_{n+1}) &= kx_{n+1} + kcx_nx_{n+1} - kx_n - kx_nx_{n+1} \\ &= k(x_{n+1} - x_n) < 0. \end{aligned}$$

Como por hipótese $(x_{n+1} - x_n) < 0$, temos $x_{n+2} - x_{n+1} < 0$. Portanto a sucessão é decrescente.

ii) Para mostrar que a sucessão é limitada, precisamos de encontrar um a e um b tais que $a < x_n < b$ para todo o $n \in N_0$.

Pela alínea anterior, provou-se que a sucessão x_n é monótona decrescente, isso é: para todo o $n \in N_0$ temos:

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots .$$

Como $x_0 > x_n$ para todo o $n > 1$, x_0 é o majorante. Por outro lado, como a sucessão é decrescente, temos para todo o $n \in N_0$

$$x_{n+1} - x_n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_n(k - (1 + cx_n))}{1 + cx_n} < 0$$

Como já foi visto anteriormente, $x_n > 0$ e $1 + cx_n > 0$ logo para a expressão anterior ser negativa $k - (1 + cx_n) < 0$. Mas isso implica

$$x_n > \frac{k - 1}{c}, \forall n \in N_0$$

ou seja, o minorante para esta sucessão é x^*. Assim $x^* < x_n < x_0$ para todo o $n \in N$.

iii) Pelas alíneas anteriores, a sucessão x_n é monótona e limitada e logo é convergente.

Seja $\lim x_n = E$. Uma vez que $\lim x_{n+1} = \lim x_n = E$, temos, tal como em (5), $E = 0 \ \vee \ E = \frac{k-1}{c} = x^*$ e, como $E \geq x^* > 0$, obtemos $E = x^*$ (note-se que $k - 1 > 0$ nesse caso).

Das alíneas anteriores verificou-se que se $k < 1$ a população decresce e o número de indivíduos tende para zero, isto é, a população tem cada vez menos indivíduos e portanto ela tende a extinguir-se. Se $k > 1$ o cenário é diferente. Nesse caso a população aproxima-se de um valor limite, $x^* = (k - 1)/c$. Mais concretamente, se $x_0 > x^*$ a função decresce para

$x^* = (k-1)/c$, ou seja, $x_0 > x_n$ e se $x_0 < x^*$ a função cresce para $x^* = (k-1)/c$, ou seja, $x_0 > x_n$.

Um dado curioso que se deve observar em relação ao ponto de equilíbrio $x^* = (k-1)/c$ sabendo que $k > 1$ e $c > 0$ é o seguinte:

1. se $k > c$, então a população de equilíbrio a ser medida é sempre maior.
2. se $k < c$, então a população será sempre pequena mas nunca igual a zero.

As exigências dos problemas ligadas a monotonia, ao limite e a convergência da sucessão, permitem uma avaliação da aplicabilidade do modelo de Beverton-Holt no estudo da dinâmica das populações, considerando o valor do parâmetro k, a sucessão pode ser monótona, crescente ou decrescente, e limitada.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico do modelo de Beverton-Holt usando a monotonia de sucessões definidas por recorrência, linha de investigação do Departamento de base do curso de Aquicultura da Faculdade de Medicina Veterinária da Universidade José Eduardo dos Santos no 1º ano. O estudo da sucessão definida por recorrência permitiu adotar o modelo de Beverton-Holt em uma sucessão iterativa favorecendo a interpretação da monotonia, da limitação e da convergência do modelo para a sua aplicação a realização de aulas práticas; para tal, foi associada uma breve resenha histórica dos modelos de crescimento populacional, onde apresentaram-se alguns pressupostos sobre o comportamento assintótico das órbitas do modelo e da estabilidade dos pontos de equilíbrio.

A metodologia adotada através do *Focus Group*, com um estudo de debate aberto como uma entrevista semi-estruturada permitiu identificar insuficiências dos participantes no estudo inicial do modelo, através das sucessões que são fudamentais para a compreensão da iteratividade recorrrente do modelo, o que favoreceu direcionar os conhecimentos conceituais sobre a monotonia, limitação e convergência, dando um suporte à determinação das condições necessárias, condições suficientes para o procedimento de solução dos problemas apresentados, onde as exigências são determinadas como crescente e decrescente para alguns valores do parâmetro k relacionado com a natalidade e a longevidade. Esse parâmetro se tomar valores inferiores a um a população decresce aproximando-se de zero. Para valores do parâmetro superior a um, a população pode crescer ou decrescer.

O comportamento crescente ou decrescente do tamanho da população é observado sempre em um intervalo determinado, então, quando os valores do parâmetro de natalidade forem inferiores que um, o limite superior corresponde a população inicial e o limite inferior é zero, ou seja, $x_0 > x_n > 0, \ \forall\, n \in N_0$. Quando os valores do parâmetro de natalidade forem superiores a um, a população terá dois intervalos de limitação onde o primeiro pode ser considerado aquele em que o limite superior é a população inicial e o inferior é a população de equilíbrio, isso é,

$x_0 > x_n > x^*$, $\forall\, n \in N_0$ e o segundo tem como limite superior a população de equilíbrio e a população inicial será o limite inferior, isto é, $x_0 < x_n < x^*$, $\forall\, n \in N_0$. Dessa feita, a população converge sempre para um valor limite para ambas as situações dos valores dos parâmetros de natalidade, onde em termos biológicos pode se observar a extinção ou persistência da população relacionado aos valores que vai tomando o parâmetro de natalidade.

Este trabalho não termina os estudos dos procedimentos para interpretação da aplicação do modelo de Beverton-Holt através de sucessões definidas por recorrência, deixando abertura para investigações futuras e associar a ela o estudo da monotonia nos modelos de captura quanto ao efeito de Hidra, e a estabilidade dos seus pontos de equilíbrio conforme as análises feitas por Santos (2018). Uma outra linha de investigação neste Departamento, está associado ao estudo do crescimento alométrico das espécies de peixes usando o modelo de Von Bertalanffy, que pode ser discretizado para se investigar a dinâmica da alometria em intervalos de tempo determinado e não de forma contínua.

REFERÊNCIAS

ANGELINI, R. Ecossistemas e modelagem ecológica. **Perspectivas da Limnologia no Brasil**, p. 1–16, 1999.

ANTIBI, A. **Tratamiento didáctico de los problemas matemáticos**. Francia: Universidad de Toloux, 1990.

BALLESTER, S. *et al.* **Metodologia do ensino da Matemática**. Tomo II. Cidade de Havana: Editorial Povo e Educação, 2000.

BESSA, K. P. **Dificuldades de aprendizagem em matemática na percepção de professores e alunos do ensino fundamental**. Universidade Católica de Brasília, 2007. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/KarinaPetriBessa.pdf>.

COUTINHO, C. P. **Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas**. 2. ed. Coimbra: Edições Almedinas, 2018.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 2014. (Trabalho original publicado em 1996).

DAVIDSON, L. J.; REGUERA, R.; FRONTELA, R. **Problemas da Matemática elementar 1**. Cuba: Editorial Pueblo y educación, 2000.

DELFINO, B. C.; MORAIS, A. S.; FAUSTINO, E. F. C. **Análise Matemática para Professores**. Searbucken (Deutschland): Novas Edições Acadêmicas, 2018.

FERRER, M. **A resolução de problemas na estruturação de um sistema de habilidades matemática na escola medeia cubana**. 2000. Tese - Instituto Superior Pedagógico "Frank País García". Santiago de Cuba, 2000.

FREITA, W. R. S.; JABBOUR, C. J. C. izando estudo de caso (s) como estratégia de pesquisa qualitativa: boas práticas e sugestões. **Revista Estudo & Debate**, v. 18, n. 2, 2011.

GHELLI, K. G. M.; SANTOS, A. O.; S., O. G. **Investigações matemáticas**: fundamentos teóricos para aprendizagem matemática nas séries iniciais do ensino fundamental. Uberaba: UNIUBE, 2015.

JIMÉNEZ, M. H. **Proposta para melhorar a referência e aplicação dos saberes da Análise Matemática na formação de professores**. 2000. Tese - UCPEJV, Cidade de Havana, Cuba, 2000.

JIMÉNEZ, M. H. **Proposta para uma Didática da Análise Matemática na formação profissional.** Cidade de Havana: Editorial Edições Cubanas, 2013.

KRUTETSKII, V. **The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren**. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

LUÍS, R. D. G. **Equações de diferenças e aplicações.** 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Universidade da Madeira, Funchal, Portugal, 2006.

REHFELDT, M. J. H. *et al.* Análise das Estratégias Utilizadas por Docentes do Ensino Fundamental para Resolver Tarefa Exploratório-Investigativa no Ensino da Pré-álgebra. **Abakós**, v. 7, n. 3, p. 03–21, 2019.

RODRÍGUEZ, T. **Enfoque sistêmico na direção da assimilação dos conceitos básicos da disciplina Matemática Superior.** 1991. Tese - Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varã", Havana, Cuba, 1991.

ROSA, A. C. **Modelos de dinâmica populacional com tempo discreto**. 2006. Monografia (Especialização em Matemática Aplicada) — Campus Avançado de Catalão, Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2006.

SANTOS, A. V. **Modelos Ecológicos Unidimensionais. Estudo de modelos e elaboração de uma acção de divulgação na área de Biomatemática.** 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) — UBI, Covilhã, Portugal, 2018.

SELLTIZ, C.; JAMODA, M.; DEUTSCH, M. **Métodos de Pesquisa nas Relações Sociais.** São Paulo: EDUSP, 1974.

THIEME, H. R. **Mathematics in population biology**. Princeton Series in Theoretical and Computational Biology. Princeton (NJ): rinceton University Press, 2003.

ZANELLI, J. C. Pesquisa qualitativa em estudos da gestão de pessoas. **Estudos da Psicologia**, n. 7, p. 79–88, 2002.