



Associações entre Geometria Analítica, Padrões Fractais e Computação: Possibilidades Para o Ensino Médio Técnico*

Associations between Analytical Geometry, Fractal Patterns and Computation: Possibilities for Technical High School

Adriano Rodrigues de Melo¹
Gustavo Vieira Ferreira²
Weliton Dal Pizzol Maria³

Resumo

Apresentamos neste trabalho uma proposta de integração entre geometria analítica, geometria fractal e programação de computadores, desenvolvida a partir de um projeto de iniciação científica executado com estudantes do ensino médio técnico. A ideia central está alicerçada no desafio de representar os padrões geométricos das formas fractais nas linguagens algébrica e computacional. Adotamos, nesses termos, uma perspectiva que se adere ao disposto na teoria dos registros de representação semiótica, devida à Raymond Duval, que do ponto de vista cognitivo, afirma que a coordenação entre diversos registros de representação é fundamental para a aprendizagem matemática. Embora vários tenham sido os padrões fractais estudados sob essa ótica, neste texto discorreremos apenas sobre os desenvolvimentos associados à famosa curva de Koch.

Palavras-chave: Registros de representação. Geometria fractal. Geometria analítica. Programação.

*Submetido em 21/09/2021 - Aceito em 05/08/2022

¹Instituto Federal Catarinense, Brasil– E-mail: adriano.melo@ifc.edu.br

²Instituto Federal Catarinense, Brasil– E-mail: gusferreira1203@gmail.com

³Instituto Federal Catarinense, Brasil– E-mail: welitondpm2003@gmail.com

Abstract

We present in this paper a proposal for integration between analytical geometry, fractal geometry and computer programming, developed from a scientific initiation project with high school students. The central idea lies in the challenge of representing some fractal patterns in algebraic and computational languages. We adopted the perspective of the theory on semiotic representations registers, due to Raymond Duval, that from the cognitive point of view, it establishes that coordination between different representation registers is fundamental for mathematical learning. Although several fractals have been studied, this paper deals only with the famous Koch curve.

Keywords: Registers of semiotic representations. Fractal geometry. Analytic geometry. Programming.

1 INTRODUÇÃO

A geometria fractal foi concebida pelo matemático francês Benoit B. Mandelbrot a partir do desafio de descrever objetos que não podiam ser expressos pela geometria euclidiana. Afinal, como representar a forma de uma nuvem, de uma montanha, do litoral brasileiro ou de uma árvore? Definitivamente "nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos e a casca não é lisa, nem o raio viaja em linha reta"(MANDELBROT, 1983, p. 1).

Não é uma tarefa fácil definir o que é um fractal⁴. Vejamos o significado dessa palavra segundo explicação dada pelo seu idealizador:

Para os estudar, concebi, aperfeiçoei e utilizei extensivamente uma nova geometria da natureza. A noção que lhe serve de fio condutor será designada por um de dois neologismos equivalentes, "objecto fractal" ou "fractal", termos que formei, pela necessidade que me surgiu com este livro, a partir do adjectivo latino *fractus*, que significa "irregular" ou "quebrado"(MANDELBROT, 1998, p. 13).

Nesse sentido, o objetivo principal da geometria fractal é representar os padrões irregulares e fragmentados observados na natureza, antes inalcançáveis com a geometria clássica, daí a expressão que dá nome à obra de Mandelbrot (1983): geometria fractal da natureza.

Existem diversas maneiras de se abordar ideias da geometria fractal no contexto do ensino básico e isso se deve ao fato de que a mesma, além de ser potencialmente interdisciplinar (ALVES, 2007), possui diversas conexões com outros temas do currículo do ensino fundamental e médio. Esse é talvez o principal motivo pelo qual muitos a têm tomado como recurso motivador ou problematizador, para desenvolver estratégias voltadas ao ensino dos mais variados temas de matemática elementar.

Podemos, por exemplo, explorar as relações métricas entre perímetro, área ou volume de objetos fractais, fazendo uso, para isso, de conexões com os conceitos de sequências e progressões geométricas (AZEREDO et al., 2013; GONÇALVES et al., 2015), além de noções intuitivas de limite (BEMFICA; ALVES, 2011; SALLUM, 2008). Para além da geometria fractal, podemos explorar fractais a partir da perspectiva de procura por padrões (FARIA, 2012; MINELI, 2012), desenvolver ou aplicar ideias associadas à razão, proporção (ALVES, 2007), figuras semelhantes (GOMES, 2010), relações trigonométricas ou teoria dos números (RABAY, 2013), introduzir ou aplicar o estudo de probabilidade geométrica (LOPES et al., 2013), ou mesmo desenvolver estudos de geometria euclidiana de maneira associada (GOMES, 2010; LUZ, 2016), ou ainda adotar uma abordagem interdisciplinar (FARIA; MALTEMPI, 2012; WEISS et al., 2011).

De fato, a geometria fractal constitui um campo fértil a ser explorado também no que concerne às tecnologias disponíveis para o desenvolvimento de estratégias didáticas. Além

⁴Mandelbrot (1983, p. 15) define fractal como um conjunto no qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica (que é sempre um número inteiro). No entanto, conforme aponta Falconer (1990), essa definição revelou-se insatisfatória na medida em que excluiu uma série de conjuntos que claramente deveriam ser considerados como fractais. Ainda segundo esse autor, várias outras definições foram propostas, mas todas elas parecem ter essa mesma desvantagem.

da abordagem que se pauta na construção de figuras ou maquetes por materiais manipuláveis (NASCIMENTO et al., 2012; PAULA; SOUZA, 2017; SONZA; LEIVAS, 2018), dada a variedade de programas gratuitos disponíveis atualmente, também é possível explorar as estruturas fractais, vasculhando as magníficas formas do seu interior interminável⁵, por meio de aplicativos (CÔRTEZ; ANTUNES, 2014; FREITAS; SANTOS, 2005; NASCIMENTO et al., 2012), sobretudo quando inserimos nesta discussão fractais altamente complexos, como os fractais de Mandelbrot e de Julia (MANDELBROT, 1983, p. 180).

Essa característica computacional da geometria fractal pode ser explorada em outro nível de desenvolvimento tecnológico, quando programas de geometria dinâmica são inseridos em propostas que incluem a construção virtual de alguns dos fractais clássicos ou pioneiros (BRANDÃO, 2002), aqueles com configurações mais simples, como o conjunto de Cantor (MANDELBROT, 1998, p. 63), a curva de Koch ou o triângulo de Sierpinsky (MANDELBROT, 1983, p. 131).

Neste trabalho, buscamos mostrar que é possível elevar ainda mais o nível de abstração tecnológico, propondo a construção de fractais com o uso de uma genuína linguagem de programação (a linguagem `python`), em conexão com um tópico do currículo do ensino médio que, nesse contexto, carece de ser explorado: a geometria analítica. Para alcançar esse objetivo, desenvolvemos um projeto extracurricular denominado "Geometria Fractal com Elementos de Geometria Analítica e Computação", no qual propomos aos estudantes do ensino médio técnico o desafio de estudar alguns dos padrões fractais na perspectiva da geometria analítica e da computação. O propósito deste trabalho consiste em apresentar o caminho metodológico adotado, algumas das construções elaboradas pelos estudantes e reflexões sobre as dificuldades encontradas.

O arcabouço conceitual que utilizamos para justificar a ação pedagógica de combinar elementos de computação, formas fractais e geometria analítica é a teoria dos registros de representação semiótica, cuja descrição será dada na seção 2. Na seção 3, além de demarcarmos o contexto ao qual este trabalho foi desenvolvido, descrevemos a partir de um exemplo, ou melhor, de um fractal (a curva de Koch), uma maneira (aquela idealizada pelos discentes) de abordar essas duas geometrias de forma integrada a uma linguagem de programação. A seção 4 é reservada para as considerações finais.

2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Os objetos aos quais a matemática se ocupa possuem a característica peculiar de possuírem uma gama diversa de representações. Duval (2017), precursor da teoria que busca explicar o funcionamento cognitivo da aprendizagem matemática pelas representações dos objetos, a teoria dos registros de representação semiótica, classifica os registros de representação em quatro grandes tipos: registro da linguagem natural, registro simbólico (numérico, algébrico, operató-

⁵Do ponto de vista teórico, na prática existe o limite computacional.

rio), registro gráfico e registro figural.

Consideremos, por exemplo, o conceito de reta. Uma imagem mental desse objeto toma forma tão logo iniciemos o ato de pensar. Para acessarmos o conceito que lhe diz respeito, podemos adotar os registros (GASTALDI; MELO, 2019b): *i*) da linguagem natural: escrevendo a palavra “reta”; *ii*) figural: desenhando um traço retilíneo sobre uma superfície plana; *iii*) simbólico: utilizando uma das equações

$$ax + by + c = 0, \quad y = mx + n, \quad \vec{v} = \beta\vec{u} + \vec{w} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

com $a, b, c, m, n, \beta \in \mathbb{R}$, $(x_A, y_A), (x_B, y_B) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (o registro simbólico é rico em diversidade, pois esses são apenas alguns exemplos de equações que, cada qual em seu contexto, representam retas); e, finalmente, *iv*) registro gráfico: traduzindo as relações algébricas das equações em (1), a partir do sistema cartesiano ortogonal.

Dada essa multitudine de representações, nem de perto esgotadas, poderíamos nos perguntar afinal qual delas correspondem ao objeto reta. Para Duval (2003), a resposta é nenhuma delas, pois afirma que “os objetos matemáticos não devem jamais serem confundidos com a representação que se faz deles” e defende que a “distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática”. Isso porque, ao contrário de sua representação, o objeto em si é invariável.

Assim, Duval e Moretti (2012) asseguram que as representações não se fazem necessárias apenas para fins de comunicação, mas também se constituem como essenciais para a atividade cognitiva do pensamento, como por exemplo, na produção de conhecimentos. Alguns trabalhos têm explorado essa ideia de produção de conhecimento, no contexto e no nível do ensino médio, como Gastaldi e Melo (2019b, 2019a) e Lima e Melo (2019), Melo (2019), Santos e Melo (2018) que abordam, respectivamente, o desenvolvimento do método computacional da biseção (utilizado para estimar o valor numérico da raiz de uma função) e a dedução do método dos mínimos quadrados (utilizado para obter a curva que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a um conjunto de pontos), a partir de suas representações semióticas.

Dois processos cognitivos principais são definidos e analisados por Duval: os tratamentos e as conversões. O primeiro diz respeito às transformações que ocorrem dentro de um mesmo registro de representação como, por exemplo, o cálculo algébrico dentro do registro simbólico que permite transformar e relacionar as equações em (1). Por outro lado, o segundo processo diz respeito à passagem de um registro de representação a outro, é o caso, por exemplo, da passagem do registro simbólico para o registro figural. Segundo esse autor (DUVAL, 2003), a conversão desempenha um papel lateral na atividade acadêmica de matemática, intervindo somente na escolha do registro no qual os tratamentos serão mais econômicos ou potentes. Porém, do ponto de vista cognitivo, ela aparece como uma atividade fundamental e esclarece que a compreensão em matemática se assegura, além do reconhecimento dos objetos em suas diversas representações, na possibilidade de se transitar livremente entre pelo menos dois registros de

representação (DUVAL; MORETTI, 2016).

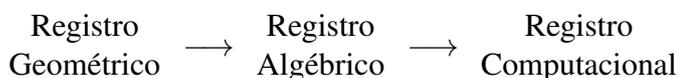
Este trabalho atinge significância, na perspectiva dessa teoria, na medida em que é guiado pelo objetivo de descrever objetos fractais em diferentes registros de representação. Em segunda instância, permite a adoção do tema formas fractais como elemento motivador para a exploração e aplicação de conteúdos elementares de geometria analítica plana. De fato, os tratamentos e as conversões necessárias para as transformações das representações dos fractais estudados, passam necessariamente pelos tratamentos e conversões das representações dos conteúdos de geometria analítica utilizados. Esse olhar voltado para o currículo do ensino médio não diminui a importância que damos à apresentação dos fractais, sobretudo porque consideramos sua representação semiótica como algo crítico, afinal são objetos definidos de modo geral “no infinito”.

Na seção 3 a seguir, discorreremos sobre uma possível integração entre formas fractais e um conteúdo da geometria analítica. Adiantamos que diversos padrões fractais foram explorados (ao final, na seção 3.5, elencamos uma lista contemplando alguns deles) e as possibilidades se mostraram inesgotáveis, seja porque inúmeras abordagens ou caminhos florescem durante a busca por uma descrição algébrica, seja porque a escolha do fractal a ser estudado é arbitrária, isto é, as opções de escolha é ilimitada. Dito isso, optamos por delimitar a descrição, no que segue, apenas ao que foi desenvolvido sobre o fractal conhecido como curva de Koch.

3 GEOMETRIA ANALÍTICA, FRACTAIS E COMPUTAÇÃO

A geometria analítica se associa com a computação de uma maneira muito natural, afinal a primeira se concentra na descoberta de representações algébricas para objetos essencialmente geométricos, enquanto que a segunda, acompanhada de uma boa biblioteca gráfica, com poucos comandos pode reverter a representação à forma inicial, isto é, a geométrica. O percurso das conversões é o dado conforme Figura 1.

Figura 1 – Percurso das conversões dos registros de representação semiótica



Fonte: Os autores (2022).

3.1 Geometria Analítica

Quais aspectos da geometria analítica secundarista são necessários para se estabelecer uma discussão razoável envolvendo fractais? É incrível que os conceitos iniciais básicos associados às coordenadas cartesianas no plano, combinados com trigonometria básica, sejam

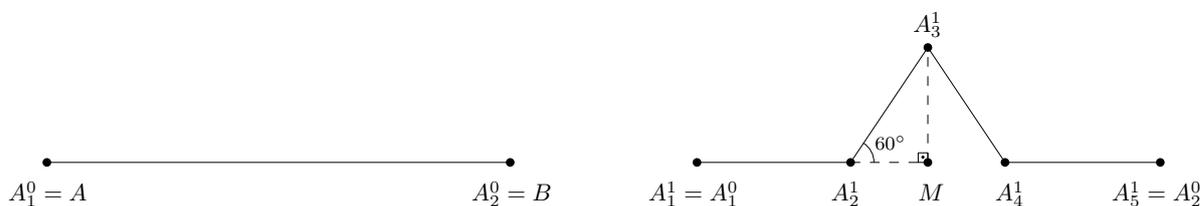
suficientes para realizar a construção de alguns dos fractais mais famosos. A correspondência entre pontos do plano e pares ordenados, o fato de que segmentos de reta são definidos por seus pontos inicial e final, o cálculo da distância (cartesiana) entre pontos e das coordenadas do ponto divisor de um segmento, estão entre as ideias exploradas por esta apresentação.

3.2 Fractais e Geometria Analítica

Seguimos a prática padrão de abordar a geometria fractal no ensino médio a partir de exemplos de fractais (BEMFICA; ALVES, 2011; FERREIRA et al., 2021; NASCIMENTO et al., 2012; PAULA; SOUZA, 2017). Dos vários fractais analisados, destacamos neste texto a famosa curva de Koch cuja construção se inicia como o apresentado na Figura 2. Vejamos os níveis de sua construção:

- i. De início (nível zero), temos um segmento de reta AB de comprimento $\overline{AB} = l$ e que, por simplicidade, consideraremos paralelo ao eixo das abscissas, conforme Figura 2. Usaremos a notação A_i^j e A_{i+1}^j , para designar os pontos inicial e final do i -ésimo segmento no j -ésimo nível. Nesse caso, temos $A_1^0 = A$ e $A_2^0 = B$.

Figura 2 – Esquema da construção do primeiro nível do fractal curva de Koch: à esquerda, Nível 0 e à direita, Nível 1



Fonte: Os autores (2022).

- ii. Para obter o nível 1 da curva de Koch, dividimos o segmento $A_1^0A_2^0$ em três partes de mesma medida, o que implica que cada novo segmento terá um comprimento de $l/3$. Assentamos a base de um triângulo equilátero de lado $l/3$ sobre o segmento central obtido a partir da divisão de $A_1^0A_2^0$, ao mesmo tempo em que eliminamos esse segmento central, de modo que chegamos ao primeiro nível da curva de Koch dada pela segunda imagem da Figura 2. Denotamos os pontos gerados por $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$ e A_5^1 . Pela regra de construção desse fractal, os quatro segmentos apresentam o mesmo tamanho $l/3$ e além disso, o triângulo $A_2^1A_3^1A_4^1$ é equilátero. Determinamos os pontos A_2^1 e A_4^1 a partir do fato de que eles

dividem o segmento inicial $A_1^0 A_2^0$ na razão⁶ $1/2$ e 2 , respectivamente:

$$A_2^1 \left(\frac{2x_{A_1^0} + x_{A_2^0}}{3}, \frac{2y_{A_1^0} + y_{A_2^0}}{3} \right) \text{ e } A_4^1 \left(\frac{x_{A_1^0} + 2x_{A_2^0}}{3}, \frac{y_{A_1^0} + 2y_{A_2^0}}{3} \right). \quad (2)$$

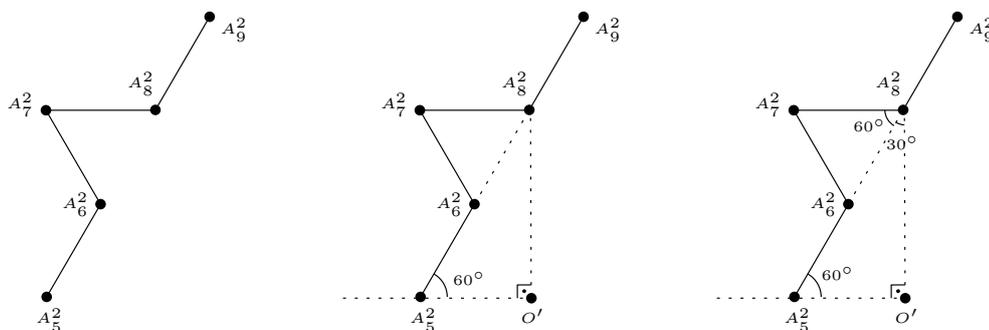
Resta apenas o ponto A_3^1 , que pode ser determinado a partir da altura $h = y_{A_3^1} - y_M$ do triângulo retângulo $A_2^1 M A_3^1$ (ver marcação feita no segundo gráfico da Figura 2), em que M corresponde ao ponto médio do segmento inicial $A_1^0 A_2^0$:

$$y_{A_3^1} = y_M + \frac{l}{3} \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{y_{A_1^0} + y_{A_2^0}}{2} + \frac{\sqrt{3}l}{6}, \text{ então } A_3^1 \left(\frac{x_{A_1^0} + x_{A_2^0}}{2}, y_{A_1^0} + \frac{\sqrt{3}l}{6} \right), \quad (3)$$

e todos os pontos da construção do nível 1 estão determinados.

- iii. No nível 2, repetimos os passos do nível 1 em cada segmento $A_i^1 A_{i+1}^1$, $i = 1, \dots, 4$, obtendo os novos segmentos de reta $A_i^2 A_{i+1}^2$, $1 \leq i \leq 4$, todos com tamanho $l/9$. Ora, importa-nos investigar os segmentos inclinados, pois para os horizontais procederemos de maneira análoga ao item anterior. Na Figura 3 destacamos a construção, no segundo nível, efetuada sobre o segmento $A_2^1 A_3^1$, do primeiro nível. Os pontos A_6^2 e A_8^2 dividem tal segmento na razão $1/2$ e 2 , respectivamente, razão pela qual são determinados de maneira análoga ao disposto na equação (2).

Figura 3 – Padrão encontrado no segundo nível da construção sobre um segmento inclinado 60° : à esquerda, construção sobre $A_2^1 A_3^1$; ao centro, projeção sobre a paralela ao eixo x ; e, à direita, relações angulares



Fonte: Os autores (2022).

Encontramos o ponto A_7^2 analisando as relações angulares desses novos segmentos. Projetando o ponto A_8^2 ortogonalmente sobre a paralela ao eixo das abscissas passando por A_5^2 , obtemos o ponto O' e o triângulo retângulo $A_5^2 O' A_8^2$, conforme segundo gráfico da Figura 3. Uma vez que o ângulo $\angle A_8^2 A_5^2 O'$ e o segmento $A_5^2 A_8^2$ medem 60° e $(2l)/9$, respectivamente, temos que da relação trigonométrica $\cos 60^\circ = \overline{A_5^2 O'} / \overline{A_5^2 A_8^2}$, tiramos

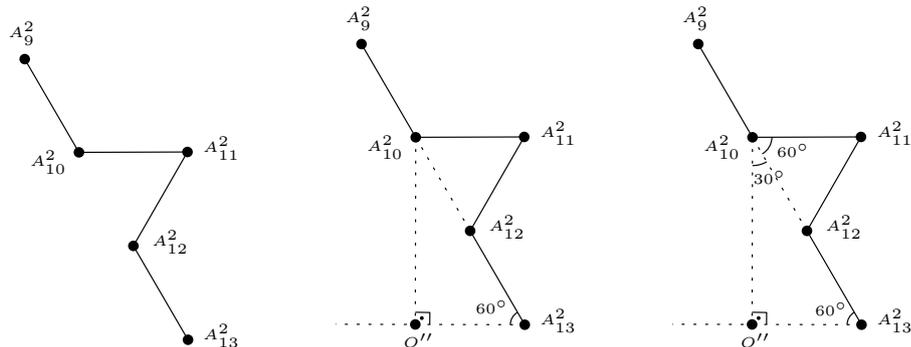
⁶O conteúdo presente aqui é aquele relacionado com o cálculo das coordenadas do ponto divisor $C(x_3, y_3)$ de um segmento definido por $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ a uma razão r , cuja fórmula é (IEZZI, 1977): $x_3 = \frac{x_1 + r x_2}{1+r}$ e $y_3 = \frac{y_1 + r y_2}{1+r}$.

que $\overline{A_5^2 O'} = l/9$ e de modo especial $\overline{A_5^2 O'} = \overline{A_7^2 A_8^2}$. Também encontramos o ângulo $\angle A_5^2 A_8^2 O' = 30^\circ$. Pela definição desse fractal, o ângulo $\angle A_6^2 A_8^2 A_7^2$ também mede 60° e disso concluímos que o segmento $A_7^2 A_8^2$ é ortogonal ao segmento $O' A_8^2$ (ver terceiro gráfico da Figura 3).

Diante dessas observações, concluímos que o quadrilátero $A_5^2 O' A_8^2 A_7^2$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos do sistema cartesiano, e por isso, a abscissa do ponto A_7^2 corresponde a de A_5^2 e, do mesmo modo, sua ordenada é idêntica a de A_8^2 .

Considerações semelhantes podem ser feitas com relação à construção realizada sobre o segmento $A_3^1 A_4^1$ inclinado 120° (ver gráficos constantes na Figura 4). Os pontos divisores A_{10}^2 e A_{12}^2 podem ser calculados como em (2). Resta o ponto A_{11}^2 . Começamos projetando A_{10}^2 ortogonalmente a reta paralela ao eixo x , que passa sobre A_{13}^2 , obtendo o ponto O'' . Então, uma vez que $\angle A_{10}^2 A_{13}^2 O'' = 60^\circ$ e $\overline{A_{10}^2 A_{13}^2} = (2l)/9$, da relação trigonométrica $\cos 60^\circ = \overline{O'' A_{13}^2} / \overline{A_{10}^2 A_{13}^2}$, concluímos que $\overline{O'' A_{13}^2} = l/9$, o que implica que $O'' A_{13}^2$ e $A_{10}^2 A_{11}^2$ possuem mesma medida $l/9$.

Figura 4 – Padrão encontrado no segundo nível da construção sobre um segmento inclinado 120° : à esquerda, construção sobre $A_3^1 A_4^1$; ao centro, projeção sobre a paralela ao eixo x ; e, à direita, relações angulares



Fonte: Os autores (2022).

Encontramos o ângulo $\angle A_{13}^2 A_{10}^2 O'' = 30^\circ$ do fato de que $\angle A_{10}^2 A_{13}^2 O'' = 60^\circ$, além disso, sabemos que $\angle A_{12}^2 A_{10}^2 A_{11}^2$ também mede 60° . Desses fatos concluímos que o segmento $A_{10}^2 A_{11}^2$ é ortogonal ao eixo das ordenadas. Essas relações implicam que o quadrilátero $O'' A_{13}^2 A_{11}^2 A_{10}^2$ trata-se de um retângulo com lados paralelos ao eixos das abscissas e das ordenadas, e por isso, as coordenadas de A_{11}^2 podem ser obtidas pela análise de A_{10}^2 e A_{13}^2 (ordenada de A_{10}^2 e abscissa de A_{13}^2).

- iv. Os próximos níveis são todos casos particulares dos anteriores. Observe, por exemplo, que no nível 3, devemos realizar uma construção sobre o segmento $A_6^2 A_7^2$ (vide Figura 3), cuja inclinação em relação à horizontal é de 120° e por isso pode ser tratado como o segmento $A_3^1 A_4^1$ (Figura 2), de mesma inclinação.

Como o fractal curva de Koch é composto por segmentos de reta, que são determinados

pelos pontos inicial e final, concluímos neste estágio, a passagem da representação geométrica, o fractal no j -ésimo nível de construção, para uma sua representação algébrica (vide diagrama presente na Figura 1).

3.3 Computação

O próximo estágio é a conversão para o registro de representação computacional, isto é, a tradução e adaptação daquilo que foi descoberto na seção 3.2 para uma linguagem de programação. Da discussão anterior notamos que não fazemos outra coisa a não ser recursivamente operar sobre um segmento a fim de se produzir outros quatro novos segmentos. Basta então definirmos uma função (na linguagem de programação), que realize essa operação de gerar 4 segmentos a partir de outro dado e aplicá-la, tantas vezes quantas forem conveniente ou possível, dado o limite computacional. O Algoritmo 1 expressa a estrutura dessa função recursiva ao mesmo tempo em que resume as discussões da seção 3.2.

Algoritmo 1: Algoritmo fundamental para a construção da curva de Koch.

- 1: **Entrada:** Vetores de abscissas $x = (x_{A_i^j}, x_{A_{i+1}^j})$ e ordenadas $y = (y_{A_i^j}, y_{A_{i+1}^j})$ das coordenadas do segmento (orientado) $A_i^j A_{i+1}^j$, comprimento l do segmento inicial AB , nível j da construção.
 - 2: **Saída:** Vetores X e Y das coordenadas de cada segmento da nova curva no nível $j + 1$.
 - 3: $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \alpha = |\Delta x|/\Delta x$
 - 4: **if** $\Delta y = 0$ **then**
 - 5: $X = \left(x_1, \frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + 2x_2}{3}, x_2 \right)$
 - 6: $Y = \left(y_1, \frac{2y_1 + y_2}{3}, y_1 + \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{3^j}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, y_2 \right)$
 - 7: **else**
 - 8: **if** $\Delta x \Delta y > 0$ **then**
 - 9: $X = \left(x_1, \frac{2x_1 + x_2}{3}, x_1, \frac{x_1 + 2x_2}{3}, x_2 \right)$
 - 10: $Y = \left(y_1, \frac{2y_1 + y_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, y_2 \right)$
 - 11: **end if**
 - 12: **if** $\Delta x \Delta y < 0$ **then**
 - 13: $X = \left(x_1, \frac{2x_1 + x_2}{3}, x_2, \frac{x_1 + 2x_2}{3}, x_2 \right)$
 - 14: $Y = \left(y_1, \frac{2y_1 + y_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, y_2 \right)$
 - 15: **end if**
 - 16: **end if**
 - 17: **Retorna** X, Y .
-

Fonte: Os autores (2022).

Conforme as discussões da seção anterior, existem três tipos de segmentos que estão evidentemente contemplados no referido algoritmo e que foram considerados convenientemente, para fins de programação, como segmentos orientados:

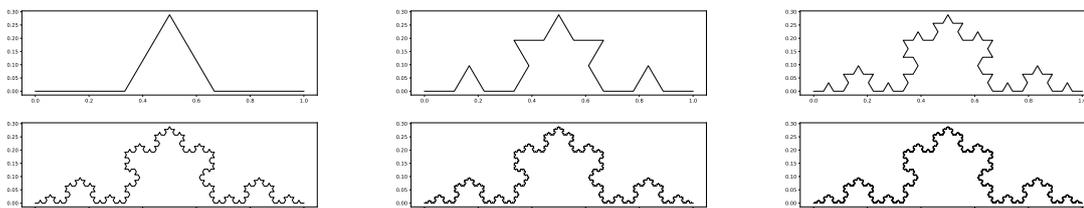
- i. Segmentos orientados horizontais ou de inclinação nula: estão expressos no Algoritmo 1 pela primeira condição $\Delta y = 0$, isto é, se a variação das ordenadas do segmento dado for

nula, então trata-se de um segmento horizontal. Atenção ao coeficiente α representando o sinal de Δx . Esse coeficiente ajusta o acréscimo da ordenada $y_{A_i^j}$: se $\alpha > 0$, então o segmento (orientado) avança para a direita e a ordenada $y_{A_i^j}$ deve aumentar em $(\sqrt{3}l)/(2 \cdot 3^n)$ unidades (como na Figura 2); por outro lado, no caso de $\alpha < 0$, situação que ocorrerá após o 3º nível, então o segmento (orientado) avança para a esquerda e devemos subtrair $(\sqrt{3}l)/(2 \cdot 3^n)$ unidades da ordenada $y_{A_i^j}$;

- ii. Segmentos com inclinação de 60° : expressos pela segunda condição $\Delta x \Delta y > 0$. Observemos junto à Figura 3 que, para o segmento (orientado) $A_5^2 A_6^2$, temos as seguintes variações: $\Delta x = x_{A_6^2} - x_{A_5^2} > 0$ e $\Delta y = y_{A_6^2} - y_{A_5^2} > 0$. Para o outro segmento (orientado) $A_{11}^2 A_{12}^2$ (Figura 4), temos as seguintes variações: $\Delta x = x_{A_{12}^2} - x_{A_{11}^2} < 0$ e $\Delta y = y_{A_{12}^2} - y_{A_{11}^2} < 0$. Ambos os segmentos possuem 60° de inclinação e satisfazem a condição avaliada;
- iii. Segmentos com 120° de inclinação: expressos pela última condição $\Delta x \Delta y < 0$, seguem as mesmas observações do item anterior.

Na verdade, a função descrita pelo Algoritmo 1 fornece as coordenadas inicial e final dos novos segmentos. Assim, dado um segmento horizontal AB arbitrário definido pelos pontos inicial A e final B , tal função fornece as coordenadas dos 5 pontos que definem os 4 novos segmentos e, aplicada novamente nesses quatro segmentos, fornece os 17 pontos relativos aos 16 novos segmentos e assim por diante. Esse processo recursivo foi implementado na linguagem `python` de programação e requer como dados de entrada apenas as coordenadas do segmento inicial (horizontal) AB e o nível j de construção que se pretende observar. Na Figura 5 apresentamos os resultados gráficos produzidos pelo referido código computacional, entrando com as coordenadas $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$ e níveis $j = 1, 2, \dots, 6$.

Figura 5 – Níveis de construção (do 1 ao 6) relativos ao fractal curva de Koch, tomando o segmento inicial (ou de nível 0) horizontal de coordenadas $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$



Fonte: Os autores (2022).

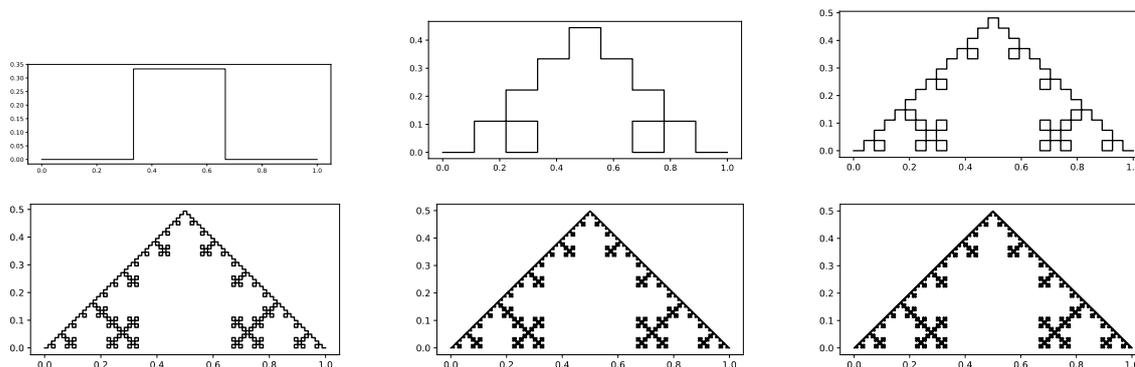
3.4 Generalização

A própria natureza dos fractais assegura o exercício de busca por padrões e regularidades. A abordagem deste trabalho consiste em representar computacionalmente esse padrão.

Este é o significado do Algoritmo 1: ele resume o padrão computacional da formação do fractal curva de Koch, pois expressa a função que deve ser utilizada em cada nível de construção. A partir do programa desenvolvido, surgiu o interesse e a oportunidade de se realizar outro tipo de generalização: variar a curva de Koch a partir de uma modificação no primeiro nível de sua construção (mantendo-se, portanto, o nível zero como um segmento de reta horizontal).

Perguntamo-nos o que aconteceria, ou melhor, que curva obteríamos se substituíssemos o salto triangular do primeiro nível (veja gráficos na Figura 2), por um salto quadrangular, ou pentagonal, ou hexagonal, etc. Não apresentaremos o desenvolvimento desta generalização, apenas algumas das formas encontradas, que chamamos de curva n de Koch, onde $2 < n \in \mathbb{N}$ representa o número de lados do polígono regular utilizado no salto. Evidentemente, a função (computacional) generalista como deve ser, fornece a curva de Koch padrão e os gráficos constantes na Figura 5, caso n seja tomado como 3. Apresentamos, para fins de ilustração, junto às Figuras 6, 7, 8, 9, 10 e 11, as construções dos níveis 1, 2, \dots , 6 das curvas n de Koch com $n = 4, 5, \dots, 9$. O leitor interessado pode acessar o código produzido⁷ e brincar com as formas geradas pelo programa (como seria o fractal gerado tomando-se n igual a 50 ou a 100 ou a 200?).

Figura 6 – Níveis de construção (do 1 ao 6) relativos ao fractal curva 4 de Koch, tomando o segmento inicial (ou de nível 0) horizontal de coordenadas $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$



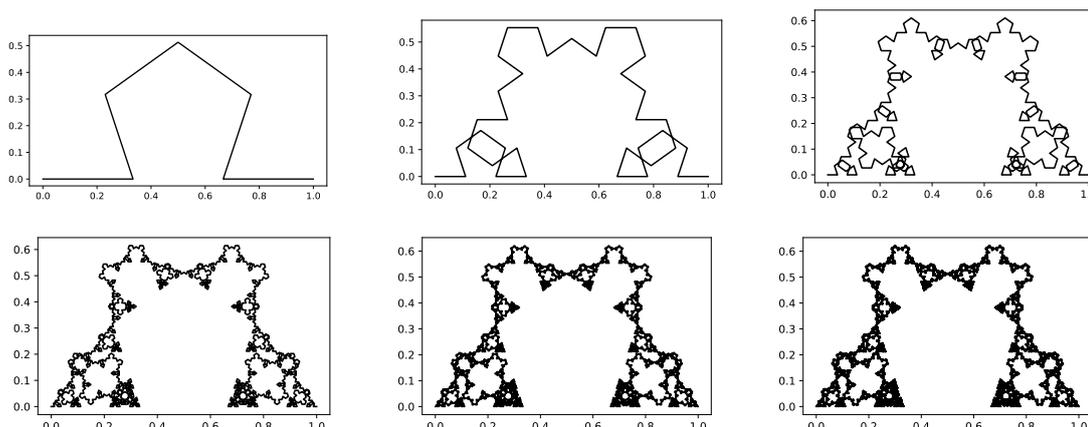
Fonte: Os autores (2022).

3.5 Contexto de Desenvolvimento

Um questionamento natural que pode surgir, diante do exposto, é a viabilidade da sua execução no nível do ensino médio dada a complexidade do desenvolvimento apresentado, adicionada ainda a necessidade de habilidades de programação de computadores. De fato, as condições de trabalho em sala de aula associadas ao tempo, à recursos materiais ou mesmo à disposição de uma ementa por vezes rígida, podem de fato comprometer a implementação

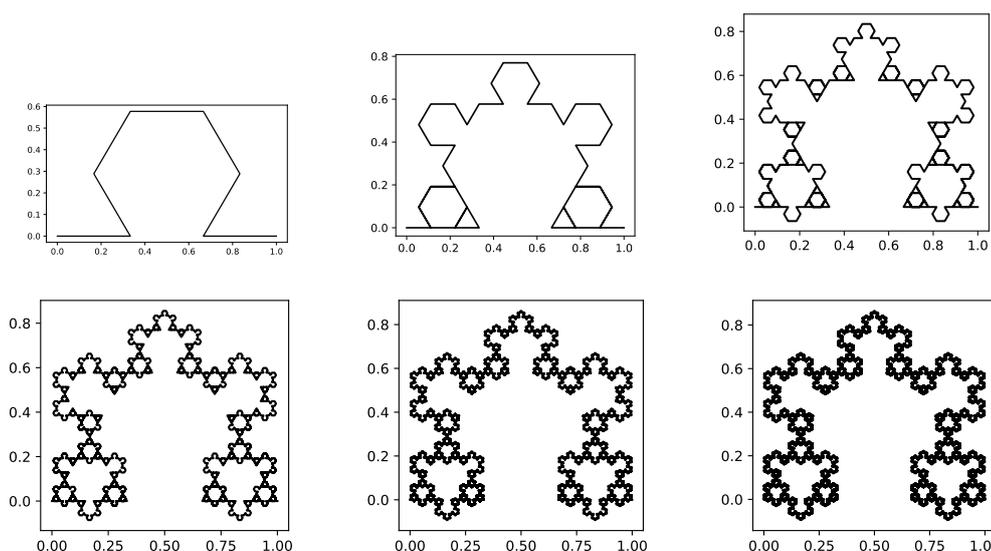
⁷O pseudocódigo programado em linguagem `python` pode ser obtido e avaliado no endereço: <<https://github.com/Welitondpm/Projeto-Fractal/blob/master/Fractals/koch.py>>.

Figura 7 – Níveis de construção (do 1 ao 6) relativos ao fractal curva 5 de Koch, tomando o segmento inicial (ou de nível 0) horizontal de coordenadas $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$



Fonte: Os autores (2022).

Figura 8 – Níveis de construção (do 1 ao 6) relativos ao fractal curva 6 de Koch, tomando o segmento inicial (ou de nível 0) horizontal de coordenadas $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$

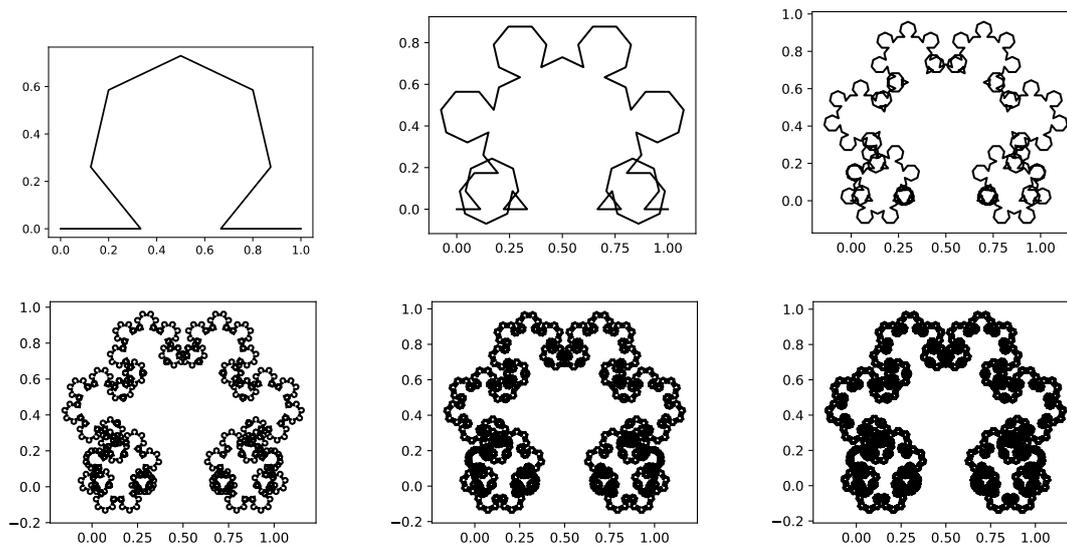


Fonte: Os autores (2022).

de atividades elaboradas da maneira como foram expostas acima e necessariamente, portanto, de serem adaptadas.

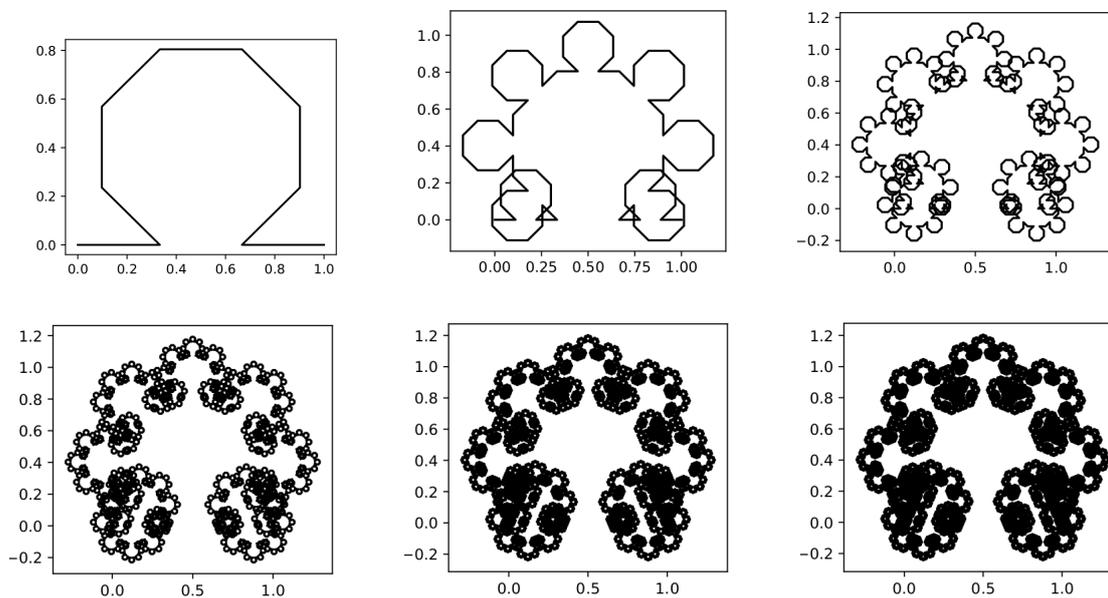
Projetos extracurriculares podem, adicionalmente, configurarem-se como ambientes muito favoráveis para sua execução. Essa afirmação baseia-se no fato de que o exposto nessas notas correspondem a algumas das experiências adquiridas ao executarmos um projeto de iniciação científica em parceria com discentes do primeiro ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio. Salientamos que encontramos terreno fértil para sua implantação, visto que

Figura 9 – Níveis de construção (do 1 ao 6) relativos ao fractal curva 7 de Koch, tomando o segmento inicial (ou de nível 0) horizontal de coordenadas $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$



Fonte: Os autores (2022).

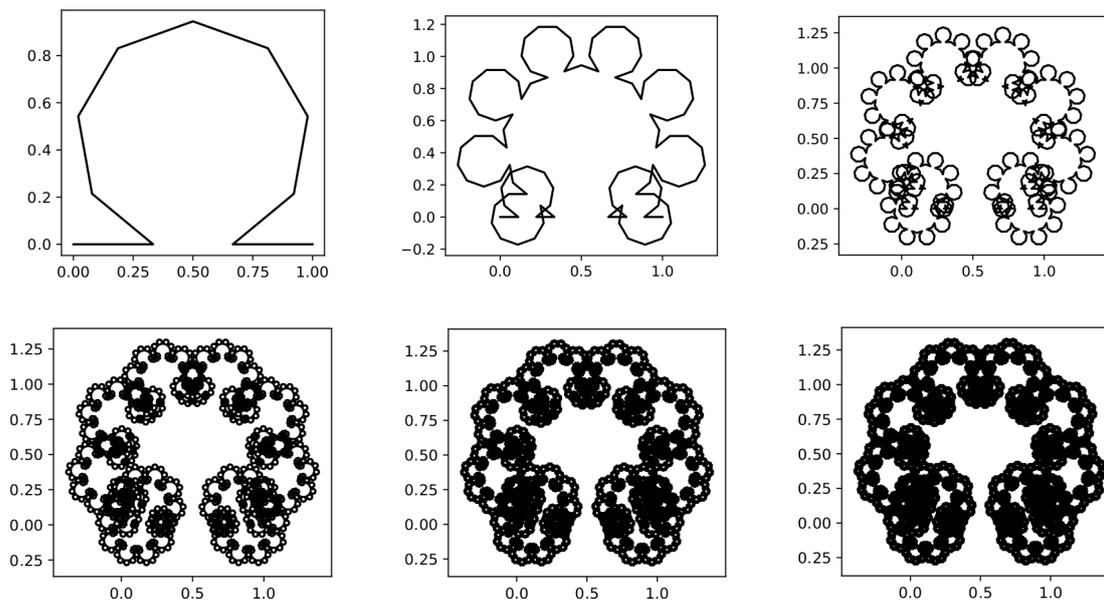
Figura 10 – Níveis de construção (do 1 ao 6) relativos ao fractal curva 8 de Koch, tomando o segmento inicial (ou de nível 0) horizontal de coordenadas $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$



Fonte: Os autores (2022).

habilidades de programação são naturalmente desenvolvidas nesse curso, ao passo que as intuições e os programas foram todos desenvolvidos pelos discentes que trabalharam no projeto. O que fizemos neste texto foi apenas formalizar e descrever suas construções, no que tange apenas ao fractal curva de Koch (muitas outras formas fractais foram exploradas).

Figura 11 – Níveis de construção (do 1 ao 6) relativos ao fractal curva 9 de Koch, tomando o segmento inicial (ou de nível 0) horizontal de coordenadas $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$



Fonte: Os autores (2022).

Seguimos, resumidamente, o seguinte roteiro:

- Pelo fato do projeto estar associado ao ensino médio, a introdução ao tema seguiu o formato padrão: mostramos por meio de figuras e imagens, sobretudo da natureza, que existem objetos com propriedades que não se encaixam no que dispõe a geometria euclidiana e que são chamadas, portanto, de geometrias não-euclidianas, sendo a geometria fractal uma delas. Após a breve apresentação, cujo intuito era apenas o de contextualizar e fornecer palavras-chaves, os discentes realizaram uma pesquisa bibliográfica sobre: *i)* o que distingue a geometria euclidiana da geometria fractal; *ii)* os fractais pioneiros ou clássicos; *iii)* conceitos associados à geometria analítica: sistema cartesiano, ponto, distância, reta, segmento de reta e circunferência;
- Caracterizar a estrutura dos fractais selecionados: cálculo da dimensão fractal, número de segmentos, comprimento de cada unidade de segmento, perímetro e área delimitada pelo fractal;
- Selecionar alguns dos fractais pesquisados para desenvolver expressões algébricas que determinem sua estrutura (conexão entre geometria fractal e geometria analítica), em seguida, construir programas em linguagem computacional `python` simulando-os. Na medida do possível, construir, por programação, fractais inéditos.

Durante a execução do projeto, os discentes construíram programas para uma variedade de fractais, dentre os principais podemos citar: conjunto de Cantor, triângulo de Sierpinski (quatro variações); tapete de Sierpinski, curva do Dragão; curva de Hilbert; curva de

Koch (apresentada neste texto, com 4 reformulações/modificações, incluindo sua generalização também apresentada neste texto); floco de neve ou ilha de Koch (incluindo sua generalização análoga ao que foi exposto); árvore fractal; esponja de Menger e conjunto de Mandelbrot. O leitor interessado pode acessar os códigos, desses e de alguns outros fractais, no repositório <<https://github.com/Welitondpm/Projeto-Fractal>>.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou evidenciar a possibilidade de se articular as geometrias analítica e fractal, a partir de um enfoque aliado à computação. A proposta foi motivada pela razoabilidade de se abordar os fractais a partir de outra perspectiva, além daquela pautada na análise das formas ou das propriedades de dimensão, perímetro e área que, fazendo justiça, não julgamos apenas serem interessantes mas também necessárias durante a introdução dessa geometria.

Reconhecemos que o caráter interdisciplinar adotado, bem como as condições de trabalho numa sala de aula regular, poderiam traduzir-se em dificuldades de execução, visto que tempo e habilidades de programação foram indiscutivelmente requeridos. Uma maneira de mitigar essas questões seria (e foi o que fizemos) implementar esta proposta na forma de um projeto extracurricular, em um curso técnico no qual a programação de computadores fosse natural. Dessa forma, justificamos e garantimos sua viabilidade, ao menos como projeto extracurricular, a partir da experiência vivenciada, demonstrada e comprovada pelos diversos programas construídos e disponíveis ao público (conforme seção 3.5).

Amparados pela teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, afirmamos que a proposta apresentada não se preocupa apenas com a inserção do discente do ensino médio no contexto da pesquisa em matemática, mas procura colaborar para que consiga utilizar as representações matemática e computacional e apreender as compreensões das ideias que elas expressam, com o intuito de corroborar com a ampliação de sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar, enfim, de pensar matematicamente (BRASIL, 2017).

Referências

- ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais: Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino Não Universitário**. 2007. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) — Universidade de Lisboa, 2007.
- AZEREDO, C. M. R. et al. Geometria fractal e progressões geométricas: Análise de um simulador de fractais. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 11, n. 1, p. p. 10, jul. 2013.
- BEMFICA, A.; ALVES, C. Fractais: Progressão e série geométrica. uma metodologia de ensino. **Revista Modelos**, v. 1, n. 1, p. 6–25, 2011.
- BRANDÃO, L. O. Algoritmos e fractais com programa gd. **Revista do Professor de Matemática**, v. 49, p. 27–34, 2002.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.
- CÔRTEZ, I. R. C.; ANTUNES, G. Geometria fractal no ensino médio: Teoria e prática. **Revista PMO**, v. 2, n. 1, p. 26–41, 2014.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S. D. A. MACHADO. **Aprendizagem em Matemática**. São Paulo: Papirus, 2003. p. 11–33.
- DUVAL, R. How to learn to understand mathematics? **JIEEM**, v. 10, n. 2, p. 114–122, 2017.
- DUVAL, R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**, v. 7, n. 2, p. 266–297, Dez. 2012.
- DUVAL, R.; MORETTI, M. T. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. **Revemat**, v. 11, n. 2, p. 01–78, Mar. 2016.
- FALCONER, K. **Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1990.
- FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais: Contribuições ao Processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.
- FARIA, R. W. S.; MALTEMPI, M. V. Padrões fractais: Conectando matemática e arte. **EccoS Revista Científica**, n. 27, p. 33–53, 2012.
- FERREIRA, G. V.; MARIA, W. D. P.; MELO, A. R. Introdução à geometria fractal no ensino médio técnico: Uma abordagem com programação python. In: **COMPUTER ON THE BEACH**, 12., 2021, online. **Anais [...]**. Itajaí: UNIVALI, 2021.
- FREITAS, R. C. O.; SANTOS, C. F. Trabalhando fractais no logo: uma experiência no ensino fundamental. In: **WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA**, 11., 2005, São Leopoldo. **Anais [...]**. São Leopoldo: UNISINOS, 2005.
- GASTALDI, L. F.; MELO, A. R. Cálculo numérico de raízes de funções com aplicação na matemática financeira e no contexto do ensino médio. In: **SEMANA DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO**, 5., 2019, Araquari. **Anais [...]**. Araquari: Even3, 2019.

GASTALDI, L. F.; MELO, A. R. O método da bisseção desenvolvido a partir da perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica e conteúdos do ensino médio. In: MOSTRA NACIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA INTERDISCIPLINAR, 12., 2019, Brusque. **Anais** [...]. Blumenau: IFC, 2019.

GOMES, A. N. **Uma Proposta de Ensino Envolvendo Geometria Fractal Para o Estudo de Semelhança de Figuras Planas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

GONÇALVES, A. G. N. et al. A utilização da geometria dinâmica para estudo da progressão geométrica via fractais. **Revista Interdisciplinar de Tecnologias e Educação**, v. 1, n. 1, p. 157–167, 2015.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar. vol. 7. Geometria Analítica**. São Paulo: Atual, 1977.

LIMA, K.; MELO, A. R. Ajuste polinomial via método de mínimos quadrados desenvolvido a partir de conceitos do ensino médio. In: SEMANA DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO, 5., 2019, Araquari. **Anais** [...]. Araquari: Even3, 2019.

LOPES, J. M.; SALVADOR, J. A.; BALIEIRO FILHO, I. F. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 7, n. 3, p. 47–62, 2013.

LUZ, E. V. **A Geometria Fractal Como Fator Minimizador das Dificuldades Referentes a Conceitos Geométricos**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2016.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

MANDELBROT, B. **Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão**. 2. ed. Lisboa: Gradiva - Publicações, Lda, 1998.

MELO, A. R. Mínimos quadrados lineares desenvolvidos no contexto do ensino médio. **Revista PMO**, v. 7, n. 2, p. 157–165, 2019.

MINELI, J. P. **Fractais: Generalização de Padrões no Ensino Fundamental**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

NASCIMENTO, M.; SILVA, S. C. R.; MACIEL, N. A. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. **Revista VIDYA**, v. 32, n. 2, p. 113–132, 2012.

PAULA, C. E. S.; SOUZA, T. M. R. Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 10, n. 3, p. 135–148, 2017.

RABAY, Y. S. F. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, n. 57, 2008.

SANTOS, M. E.; MELO, A. R. Iniciação à teoria da aproximação: Técnica de mínimos quadrados acessível ao ensino médio. In: MOSTRA NACIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA INTERDISCIPLINAR, 11., 2018, São Bento do Sul. **Anais [...]**. Blumenau: IFC, 2018.

SONZA, A. P.; LEIVAS, J. C. P. Explorando a geometria fractal no ensino médio por meio de uma oficina pedagógica. **Revista THEMA**, v. 15, n. 4, p. 1549–1561, 2018.

WEISS, K. et al. Geometria fractal: uma abordagem atualizada e interdisciplinar da matemática no ensino médio. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais [...]**. Recife: UFPE, 2011.