PUC Minas

ABAKÓS

Instituto de Ciências Exatas e Informática

Sala de Aula Invertida e Álgebra Linear: uma Proposta de Atividade Envolvendo Octave e Cadeia de Markov*

Flipped Classroom and Linear Algebra: a Suggestion of Activities Involving Octave and Markov Chains

Mônica Aparecida Cruvinel Valadão[1]
Douglas Frederico Guimarães Santiago[2]
Thiago Parente Lima[3]

Resumo

Os conceitos estudados na disciplina de Álgebra Linear são explorados em diferentes aplicações de outras áreas da Matemática, Engenharia, Economia, Biologia, Estatística, dentre outras. Essa interdisciplinaridade representa uma oportunidade para a utilização de metodologias ativas. Nesse sentido, a proposta deste trabalho é uma atividade estruturada no método sala de aula invertida, abordando conceitos de Álgebra Linear aplicados ao tema Cadeia de Markov e fazendo uso de tecnologias digitais de informação e comunicação através do Octave. Para o desenvolvimento da atividade, procurou-se aplicar as ações sugeridas pela taxonomia de Bloom. Este trabalho pode ser utilizado como um direcionamento para docentes que se interessem pelo método sala de aula invertida.

Palavras-chave: Cadeias de Markov. Metodologias ativas. Sala de aula invertida. Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação.

*Submetido em 25/07/2022 - Aceito em 25/05/2023

[1]Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Instituto de Ciência e Tecnologia, Campus JK, Brasil – E-mail: monica.valadao@ict.ufvjm.edu.br

[2]Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Instituto de Ciência e Tecnologia, Campus JK, Brasil – E-mail: douglas.santiago@ict.ufvjm.edu.br

[3]Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Instituto de Ciência e Tecnologia, Campus JK, Brasil – E-mail: thiagopl@ict.ufvjm.edu.br

Abstract

The concepts covered in Linear Algebra can be explored in different applications in mathematics, engineering, economics, biology, and statistics, among other areas. This interdisciplinarity represents an opportunity for the use of active learning methodologies. In this context, we present a structured activity with flipped classroom method. This activity approaches concepts of Linear Algebra applied to the Markov Chain and uses digital information and communication technologies with Octave. For the activity development, we tried to apply the framework suggested by Bloom's taxonomy. This work can be used as a reference for teachers interested in flipped classroom method.

Keywords: Markov chains. Active learning methodologies. Flipped classroom. Digital Information and Communication Technologies.

1 INTRODUÇÃO

Metodologia ativa (ou estratégia de aprendizagem ativa) é qualquer prática pedagógica na qual o discente é o sujeito ativo do seu processo de aprendizagem. O ambiente de aprendizagem, nesse formato de ensino, não é estruturado no docente como um transmissor de informações e posterior atuação do discente somente com a realização de atividades de repetição. Para Santos e Soares (2011), a mera transmissão de informações não mais caracteriza um processo eficiente de ensino-aprendizagem. A participação ativa ocorre em um ambiente de aprendizagem que engaja o discente em situações que o estimulem a produzir significados para os conceitos em construção e a interpretar tais significados por meio de um contexto (FILHO *et al.*, 2019). Assim, o docente desempenha um papel fundamental nesse processo porque tem como responsabilidade planejar, implementar e conduzir ações visando a aprendizagem dos discentes. Nesse sentido, Filho *et al.* (2019) destacam a necessidade de o docente refletir sobre a sua concepção de aprendizagem:

> [...] é preciso que o docente tenha claro, para si mesmo, se a aprendizagem se resume à memorização de conteúdos fragmentados e não contextualizados, ..., ou se requer a compreensão da realidade, com base em observação questionadora e possibilidade de argumentação, que permita produzir e estimular a capacidade de criar e recriar.

Um aspecto importante para obter sucesso com o uso de metodologias ativas, frisado por Morán (2015), consiste em se ter bem claro quais as competências que o docente almeje que os alunos desenvolvam com a aula ou atividade. Mitre *et al.* (2008) citam como algumas dessas competências, a criatividade, o desenvolvimento de senso crítico, a capacidade de autoavaliação, habilidades de trabalho em equipe, entre outras. Os requisitos necessários para o desenvolvimento das competências são evidenciados nos resultados de aprendizagem, os quais devem ser definidos pelo docente. Esses resultados, segundo Filho *et al.* (2019), estão relacionados aos processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação. A Taxonomia de Bloom é um recurso que pode ser utilizado pelo docente para definir os resultados de aprendizagem em uma disciplina/unidade curricular ou conteúdo. Esses devem ser definidos na forma de ações, as quais representam o que o discente deverá ser capaz de fazer ao final de uma aula ou disciplina. A Taxonomia de Bloom auxilia também no planejamento e definição das estratégias de ensino que devem ser adotadas, as quais conduzirão o discente no alcance dos resultados de aprendizagem desejados. Essa taxonomia considera que o que é esperado que o discente aprenda, definido nos resultados de aprendizagem, pode ser estruturado em níveis hierárquicos de complexidade do menor para o maior: lembrar, entender, aplicar, analisar, avaliar e criar. Os níveis da Taxonomia de Bloom são apresentados aqui de forma resumida apenas para ilustrar a sua aplicação no contexto de metodologias ativas. Para uma leitura detalhada sugere-se (FILHO *et al.*, 2019; FERRAZ; BELHOT, 2010; ZHANG; YUAN; YU, 2019).

Dentro do contexto de metodologias ativas, surgem as ideias de aprendizagem colaborativa e cooperativa. Segundo Lovato, Michelotti e Loreto (2018), alguns autores consideram esses termos como sinônimos. Costa (2005 apud LOVATO, MICHELOTTI e LORETO, 2018) aponta que na cooperaçao, há ajuda mútua na execução de tarefas, permitindo relações desiguais e hierárquicas entre os participantes do grupo enquanto na colaboração esta liderança é compartilhada na execução das tarefas. Segundo Lovato, Michelotti e Loreto (2018) a sala de aula invertida se caracteriza como uma forma de aprendizagem colaborativa.

Valente (2014 apud LOVATO, MICHELOTTI e LORETO, 2018) descreve a sala de aula invertida como uma modalidade de aprendizagem eletrônica (E-learning) em que o conteúdo e instruções seriam estudados de forma online e a sala de aula utilizada para que, de forma colaborativa, se trabalhe o conteúdo já estudado. Segundo Cook (2007), o E-learning também pode ser traduzido como educação distribuída, educação eletrônica ou instrução on-line e segundo Rocha, Joye e Moreira (2020), o E-Learning é o termo geral para todo tipo de aprendizado suportado por software.

Existem autores que apresentam uma definição mais abrangente para a sala de aula invertida, como é sugerido por Filho *et al.* (2019), Awidi e Paynter (2019). Para esses autores, na sala de aula invertida, o modelo tradicional é reestruturado para que o discente estude o conteúdo com antecedência e desenvolva as atividades durante a aula. Nesse sentido, o formato de sala de aula invertida representa também uma grande oportunidade para se introduzir e trabalhar com ferramentas de tecnologias digitais de Informação e Comunicação (TDIC). As TDICs são caracterizadas segundo Marques e Neto (2017 apud SOUZA, 2021) pelo uso de tecnologias digitais como celular, computador e dispositivos que possam ter acesso à internet.

No contexto deste trabalho, a proposta de atividade no formato sala de aula invertida considera o direcionamento apresentado em Filho *et al.* (2019), o qual descreve em detalhes os momentos Pré-aula, Aula e Pós-aula, bem como diferentes métodos que podem ser incorporados nessa estrutura de aula. Especificamente, utiliza-se do método Grupo com Tarefas Diferentes (GTD), associado ao formato de sala de aula invertida, para mostrar uma aplicação de conteúdos relacionados à Álgebra Linear. O tema da atividade é Cadeia de Markov, o qual exige como requisto básico o conhecimento sobre produto matricial, resolução de sistema linear e noção de probabilidade. Destaca-se também o aspecto computacional da proposta de atividade, na qual os problemas selecionados permitem explorar o software Octave no processo de resolução. A estrutura de atividade proposta neste trabalho é direcionada para docentes que atuam na disciplina de Álgebra Linear. Entretanto, considera-se que as ideias apresentadas aqui podem ser utilizadas como um direcionamento para docentes que atuam em outras áreas e que ainda não utilizam o método sala de aula invertida.

Por fim, o restante deste trabalho é organizado conforme a estrutura a seguir. A Seção 2, considerada como o material Pré-aula, apresenta o tema Cadeia de Markov em uma escrita acessível à discentes da disciplina de Álgebra Linear. A Seção 3 descreve a proposta de atividade deste trabalho, incluindo detalhes dos momentos Pré-aula, Aula e Pós-Aula. São apresentados também exemplos de problemas que podem ser selecionados. As etapas de resolução destes problemas, utilizando o software Octave, são detalhadas na Seção 4. As considerações finais são apresentadas na Seção 5.

2 CADEIA DE MARKOV

Esta seção apresenta uma breve introdução dos conceitos relacionados a Cadeia de Markov e que são fundamentais à resolução dos problemas relatados na Seção 3.1. Destaca-se que essa abordagem evita o uso de notações específicas da teoria de probabilidade presentes na literatura (MAGALHÃES, 2006; ROSS, 2010; MONTGOMERY; RUNGER, 2012). O interesse aqui é apresentar este conteúdo em uma linguagem acessível à discentes da disciplina de Álgebra Linear que, usualmente, ainda não cursaram nenhuma disciplina da área de probabilidade. Dessa forma, sugere-se este tópico como o material Pré-aula da atividade proposta na Seção 3. Para atender a esta finalidade, considera-se adequado abordar o tema desta seção a partir de uma noção sobre *variável aleatória* e *processo estocástico*. A descrição a seguir adota como principais referências (BARBETTA; REIS; BORNIA, 2010; KOLMAN; HILL, 2011; ANTON; RORRES, 2012; HILLIER; LIEBERMAN, 2013; TAHA, 2008).

De forma resumida, uma *variável aleatória* pode ser compreendida como uma variável em que o resultado (valor mensurado em uma dada escala de medida) depende de fatores aleatórios (fator sorte). No contexto deste trabalho, um *processo estocástico* é definido como um conjunto de *variáveis aleatórias* $\{X_k\} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ (o índice k pertencendo a um conjunto $T \subseteq \mathbb{N}$). Na prática, a *variável aleatória* X_k representa uma característica mensurável de interesse no instante k. Por exemplo:

X_k : número de unidades disponíveis de um produto no estoque de uma loja no dia k;

X_k : qualidade do ar de uma cidade no dia k;

X_k : condições de uso de uma máquina no final do dia k;

X_k : tipo de transporte utilizado pela população de uma região no ano k.

Em um *processo estocástico*, a *variável aleatória* X_k representa o *estado do processo* no instante k. Considera-se aqui somente o caso em que o *processo estocástico* possui um número finito de estados $1, \ldots, n$. O Exemplo 2.1 ilustra um *processo estocástico* que descreve o comportamento de um sistema (fenômeno em estudo) que opera ao longo de algum período.

Exemplo 2.1 Um veículo de transporte de cargas é inspecionado no início de cada semana e sua condição de uso é caracterizada como Bom, Razoável, Ruim ou Quebrado. Para a semana k, o processo estocástico para esta situação pode ser representado como

$$X_k = \begin{cases} 0, & \text{se a condição for Quebrado} \\ 1, & \text{se a condição for Ruim} \\ 2, & \text{se a condição for Razoável} \\ 3, & \text{se a condição for Bom} \end{cases} \tag{1}$$

com os estados possíveis Bom(3), Razoável(2), Ruim(1) ou Quebrado(0).

Definição 2.1 Um *processo de Markov* ou *Cadeia de Markov* é um processo estocástico com um número finito de estados cuja probabilidade de o processo estar em um determinado estado, em um dado período de observação, depende apenas do estado no período de observação imediatamente anterior.

Definição 2.2 Considere um processo de Markov com estados possíveis $1, \ldots, n$. A *Probabilidade de Transição* do estado j, numa etapa anterior $(k-1)$, para o estado i em qualquer período de observação k é denotada por p_{ij}.

Para a Cadeia de Markov na Definição 2.2, a matriz a seguir

$$\begin{array}{cc} & \text{Estado Anterior} \\ & \begin{array}{cccc} j=1 & j=2 & \ldots & j=n \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i=1 \\ i=2 \\ \vdots \\ i=n \end{array} \quad \text{Novo Estado.} \tag{2}$$

é chamada de *Matriz de Transição* da Cadeia de Markov, para a qual assume-se aqui que p_{ij} não se altera com o decorrer do tempo. Note que no elemento p_{ij} da matriz P em (2) o índice j (índice da coluna) representa o estado anterior, enquanto que o índice i (índice da linha) representa o novo estado. Assim, p_{11} é a probabilidade que o processo vai continuar no estado 1 imediatamente após ter sido observado no estado 1, p_{32} é a probabilidade que o processo vai mudar do estado 2 ao estado estado 3, e assim por diante.

Em (2) tem-se que cada coluna $j = 1, \ldots, n$ de P é um *vetor de probabilidade*, isto é, satisfaz

$$\begin{array}{c} p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{nj} = 1 \\ \text{e} \\ p_{ij} \geq 0, \text{para todo}\, i = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{3}$$

O interesse agora é na probabilidade de ocorrência de cada um dos n estados em um dado período futuro de observação $k \geq 0$, representada pelo *vetor de estado* a seguir

$$\vec{\mathrm{v}}_k = \begin{bmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ \vdots \\ p_n^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Em (4), o elemento $p_i^{(k)}$, com $i = 1, \ldots, n$, é a probabilidade de que o processo esteja no estado i no período de observação k. Para a $k = 0$, o vetor $\vec{\mathrm{v}}_0 = \begin{bmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ \vdots \\ p_n^{(0)} \end{bmatrix}$ é chamado de *vetor de* *estado inicial* da Cadeia de Markov.

Considerando uma Cadeia de Markov com n estados e respectiva Matriz de Transição (2), o vetor de estado no período de observação $(k+1)$ pode ser determinado a partir do vetor de estado do período de observação k de acordo com (5) a seguir,

$$\vec{\mathrm{v}}_{(k+1)} = P\vec{\mathrm{v}}_k. \tag{5}$$

Observe que da Expressão (5) segue que,

$$\begin{array}{rcl} \vec{\mathrm{v}}_1 & = & P\vec{\mathrm{v}}_0 \\ \vec{\mathrm{v}}_2 & = & P\vec{\mathrm{v}}_1 = P\cdot(P\vec{\mathrm{v}}_0) = P^2\vec{\mathrm{v}}_0 \\ & \vdots & \\ \vec{\mathrm{v}}_k & = & P^k\vec{\mathrm{v}}_0. \end{array} \tag{6}$$

Assim, a partir do vetor de estado inicial $\vec{\mathrm{v}}_0$ e da Matriz de Transição P determina-se o vetor de estado de qualquer período de observação futuro k.

Exemplo 2.2 Neste exemplo, adaptado de Kolman e Hill (2011), considera-se uma cidade metropolitana que implementou um sistema de transporte de metrô, o qual já está em funcionamento. As autoridades responsáveis realizaram estudos que previram o percentual de pessoas que mudarão para o transporte de metrô (M) ou que continuarão a dirigir seus automóveis (A). Os estudos em questão resultaram na seguinte matriz de transição:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Este Ano} & & \\ & & \begin{array}{cc} M & A \end{array} & & \\ P & = & \begin{bmatrix} 0,70 & 0,20 \\ 0,30 & 0,80 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} M \\ A \end{array} & \text{Próximo Ano.} \end{array}$$

Suponha que a população desta região permaneça constante. Considere ainda que, inicialmente, 25% das pessoas usam o transporte de metrô e 75% usem seus automóveis. Qual o percentual de pessoas que estarão usando o transporte de metrô após 3 anos?

Solução: O vetor de estado inicial da Cadeia de Markov é $\vec{\mathrm{v}}_0 = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{bmatrix}$. Após 1 ano, o vetor de estado é $\vec{\mathrm{v}}_1 = P\cdot\vec{\mathrm{v}}_0 = \begin{bmatrix} 0,70 & 0,20 \\ 0,30 & 0,80 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,325 \\ 0,675 \end{bmatrix}$. Em 2 anos, tem-se $\vec{\mathrm{v}}_2 = P\cdot\vec{\mathrm{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0,70 & 0,20 \\ 0,30 & 0,80 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,325 \\ 0,675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3625 \\ 0,6375 \end{bmatrix}$. O vetor de estado após 3 anos é $\vec{\mathrm{v}}_3 = P\cdot\vec{\mathrm{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0,70 & 0,20 \\ 0,30 & 0,80 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,3625 \\ 0,6375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38125 \\ 0,61875 \end{bmatrix}$. Assim, o percentual de pessoas que estarão usando o transporte de metrô após 3 anos é aproximadamente 38%.

No contexto deste trabalho considera-se somente os casos em que a Matriz de Transição P é regular, isso é, todos os elementos de alguma potência de P são positivos. Para este tipo de

Cadeia de Markov é possível obter o *vetor de estado estacionário*, o qual representa quando o processo alcança o equilíbrio. Assim, o vetor de estado estacionário mostra o comportamento do processo de Markov a longo prazo. Mais detalhes desse conceito são apresentados em (KOLMAN; HILL, 2011). A seguir são descritos de forma resumida os passos para encontrar o vetor de estado estacionário em um processo de Markov com n estados e matriz de transição regular.

Definição 2.3 Seja uma Cadeia de Markov com n estados e matriz de transição regular P. O vetor de estado estacionário do processo de Markov é o vetor de probalidade $\vec{\mathrm{v}}$ que satisfaz a Equação (7)

$$(I_n - P)\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{o}} \tag{7}$$

onde I_n é a matriz identidade ordem n, $\vec{\mathrm{v}}$ é um vetor coluna (matriz coluna) $n \times 1$ e $\vec{\mathrm{o}}$ é o vetor coluna nulo (matriz coluna nula) $n \times 1$.

Assim, para encontrar o vetor de estado estacionário nos termos da Definição 2.3 resolve-se primeiro o sistema linear homogêneo na Equação (7). Em seguida, determina-se entre as infinitas soluções deste sistema a única solução em que as componentes satisfazem a Equação (3).

Exemplo 2.3 Encontre o vetor de estado estacionário para o processo de Markov descrito no Exemplo 2.2.

Solução: O sistema linear homogêneo associado ao processo de Markov é da forma a seguir,

$$\begin{array}{rcl} (I_n - P)\cdot\vec{\mathrm{v}} & = & \vec{\mathrm{o}} \\ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,70 & 0,20 \\ 0,30 & 0,80 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{8}$$

Assim,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0,30\cdot v_1 - 0,20\cdot v_2 & = & 0 \\ -0,30\cdot v_1 + 0,20\cdot v_2 & = & 0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0,6667\cdot v_2$$

e considerando as condições em (3), tem-se que $0,6667\cdot v_2 + v_2 = 1 \Rightarrow v_2 = 0,60$ e $v_1 = 0,40$. O vetor de estado estacionário é então $\vec{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,60 \end{bmatrix}$. A longo prazo 40% da população utilizará o transporte de metrô.

3 PROPOSTA DE ATIVIDADE

Esta seção apresenta uma proposta de atividade, a ser desenvolvida através da metodologia "Sala de Aula invertida", no contexto da disciplina de Álgebra Linear e com o uso do software Octave (OCTAVE, 2020) como um recurso auxiliar no processo de resolução. Para essa atividade considera-se uma aplicação sobre Cadeia de Markov, a qual permite explorar conceitos de produto matricial, resolução de sistema linear e noção de probabilidade. Nesse sentido, o desenvolvimento da atividade requer um conhecimento prévio de tais conceitos por parte dos discentes. No que diz respeito ao uso do Octave, de fato é necessário que o docente da disciplina possua um contato com esta ferramenta computacional para ser possível orientar os discentes nesse aspecto. Como material de apoio acerca do uso do Octave em Álgebra Linear sugere-se o livro (VALADÃO *et al.*, 2022), o qual apresenta, de uma forma didática, várias atividades que permitem utilizar este software como um recurso auxiliar no processo de resolução. Entretanto, ressalta-se que é possível uma adaptação em algumas etapas da atividade e desenvolvê-la sem o uso do Octave. A Seção 4 apresenta as orientações necessárias para a etapa envolvendo o Octave.

A estrutura dessa atividade considera como principal orientação a abordagem descrita em Filho *et al.* (2019), a qual apresenta em detalhes como organizar cada uma das etapas de uma sala de aula invertida e diferentes estratégias que podem ser empregadas. Os tópicos a seguir descrevem os momentos Pré-aula, Aula e Pós-aula adaptados para o contexto do conteúdo envolvido na atividade. Um detalhe importante é que essa atividade deve ser realizada após aulas que abordam resolução de sistema de equações lineares pelos métodos de Gauss-Jordan e Eliminação Gaussina.

Pré-aula

Neste período de preparação para a Aula o discente deve ter acesso com antecedência ao conteúdo, bem como o material e respectivas orientações de estudo acerca do tema. Especificamente, o material em questão deve contemplar os seguintes tópicos: definição de processo de Markov (ou cadeia de Markov), matriz de transição, vetor de estado do processo de Markov, definição do sistema linear homogêneo associado ao cálculo do vetor de estado estacionário. Como materaial Pré-aula sugere-se o texto da Seção 2 deste artigo, o qual pode ser complementado pelos livros (KOLMAN; HILL, 2011; ANTON; RORRES, 2012; POOLE, 2004; LEON, 2011). Essa sugestão é fundamentada pelo fato de tais referências serem frequentemente adotadas, na disciplina de Álgebra Linear, em diversas instituições de ensino (UFVJM, 2020; UFMG, 2021; UFMT, 2018; UFERSA, 2019). É importante planejar a disponibilização do material considerando um período de tempo suficiente para os discentes lerem e revisarem o tema.

Aula

No contexto dessa atividade, considerando a proposta de uso do Octave, o docente deve verificar com antecedência sobre a disponibilidade de uso de computador em sala de aula ou em laboratório de informática. As etapas do momento Aula são detalhadas a seguir.

Etapa 1: nessa etapa o docente apresenta como principais objetivos da atividade: aplicar o conceito de Cadeia de Markov para determinar probabilidades em algum período futuro de observação; reconhecer e utilizar os conceitos de produto matricial e sistema de equações lineares na resolução de problemas sobre Cadeia de

Markov; utilizar o Octave como um recurso auxiliar na resolução de tais problemas; desenvolver atitudes de participação e colaboração entre os discentes. Para atingir tais objetivos os discentes são estimulados a fazerem um breve relato acerca do tema estudado e, em seguida, são envolvidos na resolução de diferentes problemas sobre Cadeia de Markov. Neste sentido, o docente divide a turma em grupos conforme a quantidade de problemas selecionados para o momento Aula. A Subseção 3.1 ilustra três situações de problemas que podem ser escolhidos, para o quais a Subseção 4 apresenta como utilizar o Octave em cada caso.

Etapa 2: nessa etapa segue-se a distribuição de um problema para cada um dos grupos definidos na **Etapa 1**, os quais devem ser identificados com o respectivo problema e respectivos discentes. É necessário registrar também a participação de cada membro do grupo na resolução do problema. O docente define, em cada grupo, o discente responsável por este registro e pode adotar a sugestão apresentada no Quadro 1. O docente deve acompanhar as discussões em cada grupo, bem como fazer sugestões que considerar pertinente ao direcionamento de resolução do problema. No contexto desta atividade, o docente pode orientar os discentes a identificarem a matriz de transição que representa o problema, bem como qual a informação que é solicitada como resposta para o problema. Conforme o tipo de problema do grupo, o docente pode solicitar aos discentes que observem as condições para o produto matricial estar definido. Para o caso em que o problema envolva a análise a longo prazo, os discentes podem caracterizar o tipo de sistema de equações lineares relacionado, bem como discutir sobre o método de resolução que pode ser utilizado. Em relação ao uso do Octave, pode ser necessário que o docente oriente de uma forma mais detalhada e precisa as dúvidas dos discentes. Ao final desta etapa, após cada grupo resolver o seu respectivo problema, o docente recolhe o relatório de registro de cada um dos grupos.

Quadro 1 – Identificação e registro das atividades do grupo.

<table>
<tr><td colspan="2">Nome do grupo:
Relator:</td></tr>
<tr><td>Membros do grupo</td><td>Contribuições para a resolução do problema</td></tr>
<tr><td>Discente 1</td><td></td></tr>
<tr><td>Discente 2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">I : Demonstrou que estudou o tema da aula.
II : Apresentou sugestões/comentários coerentes com a atividade.
III : Outras contribuições.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Etapa 3: nessa etapa ocorre a formação de novos grupos, cada grupo formado com um discente de cada grupo da **Etapa 2.** O objetivo agora é que os discentes resolvam todos os problemas apresentados na **Etapa 2**. Assim, a responsabilidade de cada discente é auxiliar/explicar aos colegas do novo grupo a questão resolvida por ele no grupo anterior. O docente pode sugerir ao discente, responsável pela etapa de explicação, que observe todo o processo de resolução do problema desenvolvido na etapa anterior. Propõe-se que nessa etapa os discentes entreguem a resolução de todos os problemas e realizem também uma autoavaliação. O formato de autovaliação escolhido aqui é a *On Minute Paper* adaptada de (FILHO *et al.*, 2019).

Avaliação *On Minute Paper*

Prezado(a) discente,

A aplicação desta avaliação formativa tem como objetivo verificar o seu entendimento sobre os assuntos abordados nesta atividade. Por gentileza, responda as seguintes questões.

1) Após esta aula você se sente capaz de:

( ) Identificar os estados de uma Cadeia de Markov.

( ) Aplicar o conceito de Cadeia de Markov para obter a probabilidade de cada estado.

( ) Aplicar o produto matricial para obter o vetor de estado.

( ) Encontrar a solução do sistema linear homogêneo, associado a Cadeia de Markov, que é um vetor de probabilidade.

( ) Utilizar recursos básicos do Octave.

2) Apresente sugestões de melhorias em relação a esta atividade.

Etapa 4: essa etapa envolve a participação de todos os discentes, os quais devem ser incentivados ao compartilhamento/socialização de esclarecimentos e dúvidas relacionadas ao conteúdo da atividade.

Pós-aula

Para a preparação do Pós-aula pode-se considerar propor aos discentes a resolução de algum problema relacionado ou orientar um estudo um pouco mais aprofundado sobre Cadeia de Markov. Uma outra sugestão é direcionar uma revisão baseada nas informações da autoavaliação.

3.1 Problemas Selecionados

A seguir são apresentadas sugestões de problemas, que podem ser adotados para o momento Aula da Seção 3, considerando diferentes contextos de aplicação do conceito de Cadeia de Markov observados em (KOLMAN; HILL, 2011; ANTON; RORRES, 2012; POOLE, 2004; LEON, 2011). É possível complementar este tópico utilizando alguns problemas de (HILLIER; LIEBERMAN, 2013; TAHA, 2008) que podem ser adaptados ao contexto de Álgebra Linear. Nesse caso, deve-se ter atenção quanto a notação adotada em tais referências nas quais o foco é a área de Pesquisa Operacional.

3.1.1 Problema 1*: Índice de assinaturas em serviços de streaming*

Considere uma pesquisa realizada com um grupo de usuários que possuem disponibilidade orçamentária para somente uma assinatura em algum dos serviços *streaming* de filmes e séries S_a, S_b, S_c, S_d e S_e, os quais oferecem planos de assinatura mensal e sem fidelidade. O percentual de assinaturas por cada um dos serviços, no mês em que a pesquisa foi realizada, é de 11% para S_a, 9% para S_b, 15% para S_c, 10% para S_d e 55% para S_e. Em tal pesquisa observou-se também a preferência dos usuários em continuar, no mês seguinte à realização da pesquisa, com o atual serviço ou assinar com algum dos outros considerados. Dos usuários de S_a, 45% continuarão com S_a, 15% mudarão para S_b, 11% mudarão para S_c, 22% mudarão para S_d e 7% mudarão para S_e. Entre os usuários de S_b, 58% continuarão com S_b, 10% mudarão para $S_a\%$, 7% mudarão para S_c, 5% mudarão para S_d e 20% mudarão para S_e. Entre os usuários de S_c, 61% continuarão com S_c, 30% mudarão para S_a, 5% mudarão S_b, 2% mudarão para S_d e 2% mudarão para S_e. Entre os usuários de S_d, 60% continuarão com S_d, 15% mudarão para S_a, 3% mudarão para S_b, 2% mudarão para S_c e 20% mudarão para S_e. Entre os usuários de S_e, 79% continuarão com S_e, 10% mudarão para S_a, 5% mudarão para S_b, 3% mudarão para S_c e 3% mudarão para S_d. Neste sentido, responda os questionamentos a seguir.

(a) Qual a porcentagem de assinaturas esperada para o serviço de *streaming* S_e no sexto mês após a realização da pesquisa?

(b) Qual a porcentagem de assinaturas esperada para o serviço de *streaming* S_e 12 meses após a realização da pesquisa?

(c) Qual a porcentagem de assinaturas esperada, a longo prazo, de cada um dos serviços de *streaming*?

(d) Quais os conceitos envolvidos na resolução de cada um dos itens anteriores?

3.1.2 Problema 2: Condição de uso de uma máquina em um processo produtivo

Este problema apresenta uma adaptação de um um processo produtivo descrito em (HILLIER; LIEBERMAN, 2013, pg. 726). Em tal processo, a deterioração de uma determinada máquina, sob condições de uso intenso, ocorre de forma rápida tanto em termos de qualidade quanto de desempenho. A máquina em questão é inspecionada no final de cada dia. Logo após essa etapa a condição da máquina é anotada e classificada em um dos quatro estados possíveis: B (bom como se fosse nova), O_{dm} (operacional - deterioração mínima), O_{di} (operacional - deterioração importante) e N_o (não operacional e substituída por uma máquina boa como se fosse nova). Considere que a deterioração da máquina pode ser modelada como uma Cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição,

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado Anterior} \\ \begin{array}{cccc} B & O_{dm} & O_{di} & N_o \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,875 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0,0625 & 0,125 & 0,50 & 0 \\ 0,0625 & 0,125 & 0,50 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} B \\ O_{dm} \\ O_{di} \\ N_o \end{array} \text{Novo Estado}, \tag{9}$$

a qual é resultado de um grande número de registros da condição de uso da máquina. Cada entrada da p_{ij} foi definida por

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_j},$$

onde n_j é o número de ocorrências da condição j e n_{ij} é o número de ocorrências em que a condição j foi seguida da condição i. Responda as questões a seguir.

(a) Qual a probabilidade da máquina estar no estado "operacional - deterioração mínima" três dias após ter sido classificada no estado "bom como se fosse nova"?

(b) Encontre o vetor de estado estacionário. Explique o que este vetor representa.

3.1.3 Problema 3: Cor da flor de uma planta

O problema sugerido aqui para ilustrar uma aplicação de Cadeia de Markov em Genética é uma adaptação de (KOLMAN; HILL, 2011, p. 145). Os conceitos relacionadas ao estudo da hereditariedade mencionados nesta adaptação podem encontrados em (GRIFFITHS *et al.*, 2013). Um estudante de Biologia tem como atividade avaliativa estudar uma variedade de planta que pode ter flor vermelha, rosada ou branca de acordo com os respectivos genótipos, AA, Aa ou aa. Considerando somente o cruzamento de cada um desses genótipos com um genótipo Aa, a probabilidade de genótipo da planta descendente pode ser representa como uma matriz de transição de uma Cadeia de Markov

$$\begin{array}{cc} & \text{Genótipo da} \\ & \text{planta ascendente} \\ & \begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0,50 & 0,25 & 0,00 \\ 0,50 & 0,50 & 0,50 \\ 0,00 & 0,25 & 0,50 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ A \\ Aa \\ aa \end{array} \quad \begin{array}{c}\text{Genótipo da} \\ \text{planta descendente.}\end{array} \tag{10}$$

A cor da flor é o fenótipo observado, o qual pode ser identificado no estudo em questão como uma característica externa da planta relacionada ao genótipo. Suponha que cada geração sucessiva seja produzida pelo cruzamento de plantas com apenas o genótipo Aa. Verifique se a Cadeia de Markov alcança o equilíbrio em cinco gerações descendentes. Quais porcentagens de plantas terão flores vermelhas, rosadas ou brancas quando o processo alcançar o equilíbrio?

4 USANDO O OCTAVE NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

4.0.1 Problema 1*: Índice de assinaturas em serviços de streaming*

A matriz de transição desse problema é

$$\begin{array}{cc} & \text{Estado Anterior} \\ & \begin{array}{ccccc} S_a & S_b & S_c & S_d & S_e \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0,45 & 0,10 & 0,30 & 0,15 & 0,10 \\ 0,15 & 0,58 & 0,05 & 0,03 & 0,05 \\ 0,11 & 0,07 & 0,61 & 0,02 & 0,03 \\ 0,22 & 0,05 & 0,02 & 0,60 & 0,03 \\ 0,07 & 0,20 & 0,02 & 0,20 & 0,79 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ S_a \\ S_b \\ S_c \\ S_d \\ S_e \end{array} \quad \text{Novo Estado.} \tag{11}$$

O vetor de estado inicial (vetor com o percentual de assinaturas de cada um dos serviços quando a pesquida foi realizada) é $\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 0,11 \\ 0,09 \\ 0,15 \\ 0,10 \\ 0,55 \end{bmatrix}$.

(a) Para uma melhor visualização das informações inseridas na Janela de Comandos do Octave, sugere-se inserir a matriz de transição conforme os passos a seguir.

```
>> P1 = [0.45,0.10,0.30,0.15,0.10];
>> P2 = [0.15,0.58,0.05,0.03,0.05];
>> P3 = [0.11,0.07,0.61,0.02,0.03];
>> P4 = [0.22,0.05,0.02,0.60,0.03];
```

```
>> P5 = [0.07,0.20,0.02,0.20,0.79];
>> P = [P1;P2;P3;P4;P5]
P =

   0.450000   0.100000   0.300000   0.150000   0.100000
   0.150000   0.580000   0.050000   0.030000   0.050000
   0.110000   0.070000   0.610000   0.020000   0.030000
   0.220000   0.050000   0.020000   0.600000   0.030000
   0.070000   0.200000   0.020000   0.200000   0.790000
```

Após isso insira os comandos

```
>> v0 = [0.11;0.09;0.15;0.10;0.55]
v0 =

   0.110000
   0.090000
   0.150000
   0.100000
   0.550000

>> k = 6
k =  6
>> v6 = (P^k)*v0
v6 =

   0.20193
   0.14092
   0.11914
   0.15767
   0.38034
```

O vetor de estado 6 meses após a realização da pesquisa é $\vec{v}_6 = \begin{bmatrix} 0,20193 \\ 0,14092 \\ 0,11914 \\ 0,15767 \\ 0,38034 \end{bmatrix}$.

É interessante observar também os vetores de estado nos períodos de observação 1 a 6. Assim, considerando as informações de `P`, `k=6` e `v0` já inseridas na Janela de Comandos, o laço a seguir retorna uma matriz V, na qual cada coluna de `V` representa o vetor de estado associado, respectivamente, ao período de observação 1 a 6.

```
>> v = v0(:);
>> for j = 1:k
     V(:,j) = P*v;
     v = V(:,j);
end
>> V
V =

   0.20239   0.20269   0.20290   0.20303   0.20312   0.20318
   0.14173   0.14216   0.14239   0.14251   0.14258   0.14262
   0.11931   0.11946   0.11958   0.11966   0.11972   0.11976
   0.15986   0.16122   0.16205   0.16257   0.16290   0.16310
   0.37671   0.37447   0.37308   0.37222   0.37168   0.37133
```

Note que a Cadeia de Markov não alcança o equilíbrio no período de obervação $k = 6$. Após a resolução do item (c) sugere-se seguir os passos do laço detalhado anteriormente para `k=30` e observar que o processo alcançou o equilíbrio.

(b) Seguindo os mesmos passos do item (a), obtém-se que o vetor de estado 12 meses após a realização da pesquisa é $\vec{v}_{12} = \begin{bmatrix} 0,20318 \\ 0,14262 \\ 0,11976 \\ 0,16310 \\ 0,37133 \end{bmatrix}$.

(c) O vetor de estado estacionário $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]^T$ é a solução do sistema linear homogêneo $(I_5 - P)\vec{v} = \vec{o}$ que satisfaz $\sum_{i=1}^{5} v_i = 1$ e $v_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 5$. Na resolução desse item utiliza-se o Octave para obter a forma escalonada reduzida do sistema linear homogêneo anterior. Na Janela de Comandos do Octave insira a matriz de transição P.

```
>> P1 = [0.45,0.10,0.30,0.15,0.10];
>> P2 = [0.15,0.58,0.05,0.03,0.05];
>> P3 = [0.11,0.07,0.61,0.02,0.03];
>> P4 = [0.22,0.05,0.02,0.60,0.03];
>> P5 = [0.07,0.20,0.02,0.20,0.79];
>> P = [P1;P2;P3;P4;P5];
```

É necessário identificar a matriz ampliada associada ao sistema linear homogêneo em questão. A função “eye()” do Octave retorna uma matriz identidade, equanto que “zeros()” retorna um vetor nulo, conforme especificado como parâmetro de entrada de cada uma destas funções. Veja os comandos a seguir,

```
>> I5 = eye(5,5)
I5 =

Diagonal Matrix

   1   0   0   0   0
   0   1   0   0   0
   0   0   1   0   0
   0   0   0   1   0
   0   0   0   0   1

>> O = zeros(5,1)
O =

   0
   0
   0
   0
   0
```

A matriz ampliada associada ao sistema linear obtida por

```
>> A = [(I5 - P),O]
A =

   0.55000  -0.10000  -0.30000  -0.15000  -0.10000   0.00000
  -0.15000   0.42000  -0.05000  -0.03000  -0.05000   0.00000
  -0.11000  -0.07000   0.39000  -0.02000  -0.03000   0.00000
  -0.22000  -0.05000  -0.02000   0.40000  -0.03000   0.00000
  -0.07000  -0.20000  -0.02000  -0.20000   0.21000   0.00000
```

Em seguida, uilize a função “rref()” do Octave para obter a forma escalonada reduzida equivalente a `A`, conforme a seguir,

```
>> E = rref(A)
E =

   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000  -0.54837   0.00000
   0.00000   1.00000   0.00000   0.00000  -0.38487   0.00000
```

```
   0.00000   0.00000   1.00000   0.00000  -0.32328   0.00000
   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000  -0.44087   0.00000
   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
```

A partir do sistema linear homogêneo representado pela matriz E, tem-se

$$\begin{cases} v_1 &= 0,54867 \cdot r \\ v_2 &= 0,38487 \cdot r \\ v_3 &= 0,32328 \cdot r \\ v_4 &= 0.44087 \cdot r \\ v_5 &= r,\ r \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{12}$$

O vetor de estado estacionário é a solução em (12) que satisfaz $\sum_{i=1}^{5} v_i = 1$. Logo, $r = 0,37073$ e o vetor de estado estacionário é $\vec{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0,20330 \\ 0,14268 \\ 0,11985 \\ 0,16344 \\ 0,37073 \end{bmatrix}$. Para obter o vetor de estado estacionário deste problema usando o Octave, a partir de E e (12), pode-se executar os passos a seguir,

```
>> rvt = [-E(1:4,5);1]
rvt =

   0.54837
   0.38487
   0.32328
   0.44087
   1.00000

>> sr = sum(rvt)
sr =  2.6974
>> r = 1/sr
r =  0.37073
>> v = rvt.*r
v =

   0.20330
   0.14268
   0.11985
```

```
0.16344
0.37073
```

Observe que os comandos do Octave para calcular o vetor de estado de estacionário devem ser adaptados conforme a estrutura da matriz `E`.

4.0.2 *Problema* 2*: Condição de uso de uma máquina em um processo produtivo*

(a) O vetor de estado inicial deste problema é $\vec{\mathrm{v}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{\mathrm{v}}_4 = \begin{bmatrix} 0,15625 \\ 0,53320 \\ 0,15527 \\ 0.15527 \end{bmatrix}$ é o vetor de estado no período de observação `k=4`. A resolução usando o Octave pode ser feita seguindo o mesmo raciocínio descrito na Subsubseção 4.0.1.

A probabilidade da máquina estar no estado “operacional - deterioração mínima” é $53,32\%$.

(b) O vetor de estado estacionário $\vec{\mathrm{v}} = [v_1, v_2, v_3, v_4]^T$ é a solução do sistema linear homogêneo $(I_4 - P)\vec{\mathrm{v}} = \vec{o}$ que satisfaz $\sum_{i=1}^{4} v_i = 1$ e $v_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Na resolução deste item utiliza-se o Octave para obter a forma escalonada reduzida do sistema linear homogêneo anterior. Seguindo os mesmos passos da Subsubseção 4.0.1 para o uso do Octave, obtém-se que

$$\begin{cases} v_1 &= r \\ v_2 &= 3,5 \cdot r \\ v_3 &= r \\ v_4 &= r,\, r \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13}$$

O vetor de estado estacionário é a solução em (13) que satisfaz $\sum_{i=1}^{4} v_i = 1$. Assim, $r = 0,15385$ e o vetor de estado estacionário é $\vec{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0,15385 \\ 0,53846 \\ 0,15385 \\ 0,15385 \end{bmatrix}$.

4.0.3 *Problema* 3*: Cor da flor de uma planta*

O vetor de estado inicial neste caso é $\vec{\mathrm{v}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e os passos a seguir mostram a resolução com o Octave.

```
>> P1 = [0.50,0.25,0.00];
>> P2 = [0.50,0.50,0.50];
>> P3 = [0.00,0.25,0.50];
>> P = [P1;P2;P3]
P =

   0.50000   0.25000   0.00000
   0.50000   0.50000   0.50000
   0.00000   0.25000   0.50000
>> k = 5;
>> v0 = [0;1;0];
>> v = v0(:);
>> for j = 1:k
    V(:,j) = P*v;
    v = V(:,j);
end
>> V
V =

   0.25000   0.25000   0.25000   0.25000   0.25000
   0.50000   0.50000   0.50000   0.50000   0.50000
   0.25000   0.25000   0.25000   0.25000   0.25000
```

Note que a matriz V mostra, em cada coluna, o respectivo vetor de estado associado a cada período de observação 1 a 5. Assim, em 5 gerações decendentes o processo já alcançou o equilíbrio e as porcentagens de plantas com cores vermelhas, rosadas ou brancas são, respectivamente, $25\%, 50\%$ e 25%.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho propôs a realização, no contexto da disciplina de Álgebra Linear, de atividades envolvendo os conceitos de Cadeia de Markov. Essas atividades se inserem em um esquema de metodologias ativas em uma sala de aula invertida, onde primeiramente, em uma pré-aula, são apresentados os materiais de estudo para os discentes, sendo que esses devem ler o material para que na aula propriamente dita sejam desenvolvidas atividades em cima dos conceitos previamente estudados. As atividades sugeridas apresentam tanto um caráter colaborativo, o que caracteriza a sala de aula invertida, como também um caráter cooperativo. Além disso, as atividades desenvolvidas fazem forte uso das tecnologias de informação e comunicação, as TDICs, através principalmente do uso do Octave.

Para exercitar a competência de lembrar, na Etapa 1 da fase de aula, antes da divisão da turma em grupos, instiga-se os discentes a fazerem um breve relato sobre o conteúdo de cadeia de Markov previamente disponibilizado na pré-aula.

Na Etapa 2 da fase de aula, o discente deverá tentar aplicar o conteúdo disponibilizado no desenvolvimento das atividades. Nessa etapa também se introduz o uso do Octave. Na formulação original da taxonomia de Bloom, a compreensão (associado ao verbo entender na versão revisada) se constitui em uma etapa anterior a aplicação. Entretanto, observa-se em diferentes trabalhos, relacionados a taxonomia de Bloom revisada, que pode ser mais fácil entender um assunto após aplicá-lo, e só então ser capaz de explicá-lo. Assim, considera-se aqui que a meta entender pode ser feita após a aplicação, ou mesmo de forma concomitante.

Na Etapa 3, ocorre a formação de novos grupos, cada grupo formado com um discente de cada grupo da Etapa 2. Desta forma os discentes terão que resolver todos os problemas, tendo acesso a problemas que não foram originalmente expostos. Pretende-se aqui desenvolver a meta de analisar. Cada discente deverá auxiliar os outros, explicando, de acordo com suas experiências na resolução dos problemas anteriores, como deverão proceder com os novos, comparando as semelhanças e diferenças entres os problemas. Ainda nessa etapa, a meta de avaliar é explorada. Isto é feito através da autoavaliação formativa. Apesar da meta criar não ser explorada nestas atividades, considera-se que é possível abordá-las como um item da etapa de pós-aula, propondo que os discentes elaborem problemas semelhantes relacionados às atividades desenvolvidas.

Observa-se ainda que as atividades propostas permitem explorar outros conceitos além daqueles destacados nas Seções 2 e 3. O vetor de estado estacionário de uma matriz de transição regular pode ser interpretado também como um autovetor associado ao autovalor 1 dessa matriz. Outro detalhe é o problema de condição de uso de uma máquina em um processo, o qual pode ser retomado para explorar outros aspectos relevantes para a engenharia. Por exemplo, os custos associados à condição de operação da máquina ou determinar o período esperado em que uma máquina pode ser usada antes de ser substituída. Entretanto, tal abordagem foge do escopo deste trabalho porque envolve conceitos que não são tratados na estrutura de atividade apresentada. Embora o contexto deste trabalho seja a disciplina de Álgebra Linear, considera-se que as ideias apresentadas aqui podem ser utilizadas como um direcionamento para docentes que atuam em outras áreas e se interessam pelo método sala de aula invertida.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações.** Tradução de Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

AWIDI, I. T.; PAYNTER, M. The impact of a flipped classroom approach on student learning experience. **Computers & Education**, Elsevier, v. 128, p. 269–283, 2019.

BARBETTA, P. A.; REIS, M. M.; BORNIA, A. C. **Estatística Para Cursos de Engenharia e Informática**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

COOK, D. Web-based learning: pros, cons and controversies. **Clinical Medicine**, v. 7, n. 1, 2007.

FERRAZ, A. P. C. M.; BELHOT, R. V. Taxonomia de bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. **Gestão & produção**, v. 17, p. 421–431, 2010.

FILHO, G. E. *et al.* **Uma Nova Sala de Aula é Possível: Aprendizagem Ativa na Educação em Engenharia**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

GRIFFITHS, A. J. F. *et al.* **Introdução à Genética.** Tradução de Idilia Vanzellotti e revisão técnica de Márcia Mattos Gonçalves Pimentel. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2013.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional.** Tradução de Ariovaldo Griesi e revisão técnica de Pierre J. Ehrlich. Porto Alegre: AMGH, 2013.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** Tradução de Alessandra Bosquilha. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações.** Tradução de Sérgio Gilberto Taboada. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LOVATO, F. L.; MICHELOTTI, A.; LORETO, E. L. S. Metodologias ativas de aprendizagem: uma breve revisão. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 2, 2018.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2006.

MITRE, S. M. *et al.* Metodologias ativas de ensino-aprendizagem na formação profissional em saúde: debates atuais. **Ciênc. saúde coletiva**, n. 13 suppl 2, p. 2133–2144, 2008.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

MORÁN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. **Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens.**, v. 2, n. 1, p. 15–33, 2015.

OCTAVE, G. **Scientific Programming Language**. 2020. Disponível em: <https://www.gnu.org/software/octave/>. Acesso em: 11 mai. 2020.

POOLE, D. **Álgebra Linear.** Tradução técnica de Martha Salermo Monteiro (coord). [et al]. São Paulo: Thomson Learning, 2004.

ROCHA, S. S. D.; JOYE, C. R.; MOREIRA, M. M. A educação a distância na era digital: tipologia, variações, uso e possibilidades da educação online. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 6, 2020.

ROSS, S. **Probabilidade**: um curso moderno com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SANTOS, C. P. dos; SOARES, S. R. Aprendizagem e relação professor-aluno na universidade: duas faces da mesma moeda. **Estudos em avaliação educacional**, v. 22, n. 49, p. 353–369, 2011.

SOUZA, F. F. d. **Tecnologias de Informação e Comunicação Digitais no ensino: produção de um Material Didático e Instrucional para apoio às aulas práticas de física**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Diamantina, 2021.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional.** Tradução de Arlete Simille Marques e revisão técnica de Rodrigo Arnaldo Scarpel. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

UFERSA. **Universidade Federal Rural do Semi-Árido**: Projeto pedagógico do curso interdisciplinar em ciência e tecnologia. 2019. Disponível em: <https://cet.ufersa.edu.br/matriz-curricular-ementa/>. Acesso em: 11 nov. 2021.

UFMG. **Engenharia Elétrica**: Curso de graduação em engenharia elétrica da ufmg. 2021. Disponível em: <https://eletrica.cpdee.ufmg.br/index.php/disciplinas/>. Acesso em: 11 nov. 2021.

UFMT. **Curso de Bacharelado em Ciência da Computação - Araguaia**: Projeto pedagógico do curso de graduação em ciência da computação. 2018. Disponível em: <https://www.ufmt.br/curso/ccicetcua>. Acesso em: 11 nov. 2021.

UFVJM. **Instituto de Ciência e Tecnologia**: Projeto pedagógico do curso de graduação em ciência e tecnologia. 2020. Disponível em: <https://www.ict.ufvjm.edu.br/>. Acesso em: 17 set. 2021.

VALADÃO, M. A. C. *et al.* **Material didático envolvendo o uso do Octave como suporte para o aprendizado de álgebra linear**. 1. ed. Diamantina: UFVJM, 2022. Disponível em: <http://acervo.ufvjm.edu.br/jspui/handle/1/2761>.

ZHANG, Y.; YUAN, C.; YU, H. L. Study on application of bloom's taxonomy in engineering project management course. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 1176, p. 042016, 2019.