

O Cilindro Através de Matrizes com o RobotStudio*

The Cylinder Through Matrices with RobotStudio

Gerson Bruno Pinto de Aguiar¹
Cleidinaldo Aguiar Souza²

Resumo

Neste trabalho utilizaremos o ambiente de simulação robótica, RobotStudio, para aplicar o método de aprendizagem STEM. Mais precisamente, apresentaremos uma abordagem para a teoria de matrizes combinada com o ambiente RobotStudio, para resolver problemas reais envolvendo geometria básica. Esta técnica em que problemas matemáticos são resolvidos através da interdisciplinaridade com outras áreas apresentadas aos estudantes da educação básica, faz parte do modo de aprendizagem STEM. O método utilizado neste trabalho evidencia como as novas profissões necessitam cada vez mais de criatividade matemática. Faremos uma apresentação do funcionamento do simulador robótico, RobotStudio, com o foco em sua funcionalidade para resolver os problemas abordados neste trabalho. Utilizaremos a representação algébrica de figuras geométricas plana e espacial através de matrizes, tal que esta ligação entre álgebra e geometria nos permite ensinar ao braço robótico executar a tarefa que lhe é designada com uma excelente precisão. Tudo isso mostra que toda essa conjuntura para resolver problemas do mundo real utilizando ferramentas do mundo virtual, depende fortemente de um prévio conhecimento de matemática. O que acaba tornando este trabalho uma fonte de treino, criatividade e curiosidade matemática.

Palavras-chave: Matrizes. Cilindro. Robótica. Robotstudio. STEM.

*Submetido em 25/07/2023 - Aceito em 11/07/2025

¹Secretaria Municipal de Educação de Timon, Brasil- gersonbrunoaguiar@gmail.com.

²Universidade Federal do Piauí, Brasil- aguiarnaldo@ufpi.edu.br.

Abstract

In this work we will use the robotic simulation environment, RobotStudio, to apply the STEM learning method. More precisely, we will present an approach to matrix theory combined with the RobotStudio environment, to solve real problems involving basic geometry. This technique, in which mathematical problems are solved through interdisciplinarity with other areas presented to basic education students, is part of the STEM learning method. The method used in this work shows how new professions increasingly need mathematical creativity. We will make a presentation of the functioning of the robotic simulator, RobotStudio, focusing on its functionality to solve the problems addressed in this work. We will use the algebraic representation of plane and spatial geometric figures through matrices, such that this connection between algebra and geometry allows us to teach the robotic arm to perform the task assigned to it with excellent precision. All of this shows that this whole situation for solving real world problems using tools from the virtual world strongly depends on a prior knowledge of mathematics. Which ends up making this work a source of training, creativity and mathematical curiosity.

Keywords: Matrices. Cylinder. Robotics. Robotstudio. STEM.

1 INTRODUÇÃO

A quarta revolução industrial, chamada de Indústria 4.0, é baseada em inovações tecnológicas digitais que alteram as interfaces entre o trabalho humano e os processos controlados por sistemas computacionais. A nova indústria tem feito com que vários países priorizem o processo de capacitação para atender à Indústria 4.0 pois, atualmente, a velocidade com que novas tecnologias são desenvolvidas está várias vezes à frente do ritmo das mudanças no sistema de educação. Gleason (2018) argumenta que cada elemento presente no planeta está sendo forçado a se adaptar a um quadro acelerado e competitivo em várias áreas, inclusive na educação. Salas de aula inovadoras que integram novas tecnologias para melhorar o desempenho dos alunos são cada vez mais necessárias no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Rosa e Orey (2018), a Indústria 4.0 exige que os humanos tenham, além do conhecimento, habilidades para colaborar, resolver problemas, pensar criticamente e trabalhar em equipe. É cada vez mais evidente que as novas tecnologias estão fundindo os mundos físico, digital e biológico, influenciando toda a sociedade e modificando todas as disciplinas. É um desafio fazer com que os estudantes de hoje tenham criatividade e a habilidade necessária para trabalhar com as novas tecnologias e, no futuro, possam desenvolver novas tecnologias importantes para a sociedade. Uma das abordagens de aprendizagem que podem educar gerações para enfrentar os desafios do século XXI é o STEM, que em inglês significa Science, Technology, Engineering, and Mathematics. Esse modo de aprendizagem, nos anos de 1990, foi originalmente chamado pelo National Science Foundation (NSF) de SMET (Science, Mathematics, Engineering, and Technology). No início dos anos 2000, a sigla SMET foi reordenada para a sigla STEM. (Breiner et al., 2012).

O modo de aprendizagem STEM é uma abordagem educacional que integra ciência, tecnologia, engenharia e matemática no processo de ensino e aprendizagem. Na visão de Bybee (2013), STEM é a interdisciplinaridade entre ciência, tecnologia, engenharia e matemática. Esta definição concorda com a definição dada em Gonzalez e Kuenzi (2012). Já para Yildirim e Selvi (2016), STEM é o processo de aprendizagem através de problemas da vida real. Além disso, em Pratama et al. (2016), os autores consideram que o uso de STEM é adequado para o ensino e aprendizagem, desenvolvendo o pensamento criativo e crítico dos alunos. Por sua vez, Struyf et al. (2019) descobriram que o modo de aprendizagem STEM é uma excelente abordagem para promover o envolvimento dos alunos na aprendizagem, pois os alunos são fisicamente e emocionalmente envolvidos no ambiente de aprendizagem.

O modo de aprendizagem STEM tem sido desenvolvido em muitos países, como, por exemplo: Taiwan (Chen; Lin, 2019), Estados Unidos (Gonzalez; Kuenzi, 2012), Suíça (Hinojo-Lucena et al., 2020), Japão (Yata et al., 2020) e muitos outros. De acordo com Naya et al. (2017) e Takacs et al. (2016), uma maneira de combinar todas as áreas do modo de aprendizagem STEM é utilizando robótica no processo de ensino e aprendizagem. Em toda a educação

básica, podemos utilizar robôs como ferramenta educacional. Em particular, no ensino médio, o professor, em colaboração com os alunos, pode aprofundar a capacidade robótica e as aplicações.

A robótica educacional surgiu como uma ferramenta pedagógica poderosa, profundamente enraizada nas teorias de aprendizagem construtivista e construcionista. Papert (1980), pioneiro nessa área, defendia que a aprendizagem é mais eficaz quando os alunos constroem ativamente o conhecimento por meio do envolvimento prático e da criação de objetos tangíveis, que ele chamava de “objetos para pensar” (Chaidi, Eirini et al., 2021). Essa abordagem, que se baseia no construtivismo de Piaget e na teoria sociocultural de Vygotsky, enfatiza a descoberta, a resolução de problemas e a colaboração, promovendo não apenas habilidades técnicas, mas também o desenvolvimento social e cognitivo (Chaidi, Eirini et al., 2021). A robótica educacional, portanto, oferece um contexto interdisciplinar e lúdico, no qual os alunos podem projetar, construir e programar robôs, tornando conceitos abstratos concretos e envolventes (Trapero-González, Irene et al., 2024).

Diretrizes educacionais contemporâneas, como a BNCC (Brasil, 2018), apoiam a integração das tecnologias digitais e do pensamento computacional nos currículos, alinhando-se com a tendência global de utilizar a robótica educacional para promover habilidades do século XXI (Mury, Sophia Reyes et al., 2022). Pesquisas destacam que a robótica na sala de aula aumenta a motivação, a criatividade, o trabalho em equipe e a comunicação, além de apoiar o desenvolvimento de competências STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática) e reduzir estereótipos de gênero nessas áreas (Trapero-González, Irene et al., 2024). Ao envolver os alunos em projetos colaborativos e práticos, a robótica educacional não só estreita a distância entre teoria e prática, mas também prepara os aprendizes para as exigências de um mundo cada vez mais digital, ecoando a visão de Papert de que a aprendizagem significativa surge da participação ativa e da exploração criativa (Chaidi, Eirini et al., 2021).

A robótica como ferramenta educacional está em rápida expansão, com professores, pesquisadores e empresas caminhando em conjunto para criarem um novo ambiente de aprendizagem nas escolas. Existem algumas plataformas robóticas educacionais, e as mais populares são as seguintes: AlphaBot2, Lego EV3, Dash & Dot, Edison, EUROPA, Ranger, Mbot, ThymioII. Existem ainda simuladores robóticos voltados para a Indústria 4.0 que, embora não sejam plataformas educacionais, podem ser facilmente adaptados para o modo de aprendizagem STEM, como, por exemplo: CoppeliaSim e RobotStudio.

O CoppeliaSim, desenvolvido pela empresa Coppelia Robotics, possui uma versão gratuita chamada CoppeliaSim Edu, disponível em (<https://www.coppeliarobotics.com/>). Esse simulador possui uma linguagem de programação própria chamada LUA, embora admita interligação com outras linguagens, como, por exemplo, Python. Por sua vez, o RobotStudio, desenvolvido pela empresa ABB Robotic (<https://new.abb.com/products/robotics/pt>), é um simula-

dor voltado para fins comerciais; porém, as instituições de ensino podem obter gratuitamente a licença para utilização do simulador para fins educacionais. O RobotStudio possui uma linguagem de programação própria, chamada RAPID, e o melhor é que um joystick facilita o trabalho com esse simulador. Como o RobotStudio representa exatamente o que acontece dentro do ambiente de trabalho de uma indústria, e o seu joystick exige conhecimento de matemática a nível básico, por meio da noção de geometria espacial, este simulador torna-se naturalmente uma ferramenta a ser trabalhada dentro do ambiente STEM.

Neste trabalho, utilizaremos a robótica aplicada ao modo de aprendizagem STEM. Mais precisamente, utilizaremos o simulador robótico RobotStudio no processo de ensino-aprendizagem de matrizes, onde resolveremos um problema do mundo real combinando essas ferramentas. Este trabalho está organizado da seguinte maneira: a Seção 1 apresenta esta introdução; na Seção 2, discute-se a relação entre a robótica educacional e o ensino de matemática; a Seção 3 descreve o ambiente de simulação RobotStudio; na Seção 4, são exploradas operações com matrizes aplicadas à movimentação do robô, com base em um problema prático; a Seção 5 apresenta uma proposta didática para a utilização do simulador no ensino de conceitos matemáticos; por fim, a Seção 6 é destinada às considerações finais e conclusões do estudo.

2 ROBÓTICA EDUCACIONAL E SEU IMPACTO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Desde o final da década de 1980, quando a robótica foi introduzida pela primeira vez em sala de aula, ela passou a ser utilizada em diversos níveis de ensino e para uma variedade de disciplinas (Malec, 2001). A partir de meados dos anos 90, observou-se a utilização de plataformas de aprendizagem baseadas em robôs, a diversificação de cursos universitários com a criação de escolas de robótica e o início de um novo campo de pesquisa, denominado Robótica Educacional (Kumar, 2004). Nesse período, a tecnologia robótica começou a ser incorporada ao currículo escolar, inicialmente como uma ferramenta de ensino, muitas vezes dentro dos departamentos de ciência da computação e engenharia.

A robótica educacional tem se expandido para diferentes países na Ásia, Europa, América e África, tornando-se cada vez mais popular, tanto dentro das grades curriculares quanto fora delas, em diversas instituições educacionais ao redor do mundo (Muñoz et al., 2012). Conforme proposto por Papert (1980), que conceituou os robôs educacionais como “objetos para pensar”, a robótica educacional passou a ocupar um papel central como metodologia no âmbito da teoria do construcionismo. Segundo o autor, “a aprendizagem é mais eficaz quando parte de uma atividade que o aluno experimenta como construção de um produto significativo”, evidenciando que o processo de aprendizagem se aprofunda quando fundamentado em experiências ativas, contextualizadas e com relevância cognitiva para o estudante.

Em resposta às demandas da sociedade atual por novas habilidades e competências, a robótica educacional tem se destacado como uma ferramenta inovadora. Ela proporciona um ambiente de aprendizagem multidisciplinar, permitindo que os alunos desenvolvam diferentes habilidades enquanto enfrentam os desafios do mundo moderno. A robótica, em particular, tem mostrado grande potencial no ensino de matemática. Ela não apenas facilita a compreensão de conceitos matemáticos, mas também engaja os alunos de maneira lúdica e prática, alinhando-se com as teorias de Seymour Papert e David Ausubel.

A robótica educacional é uma combinação de ciência, tecnologia, engenharia e matemática, e tem se mostrado eficaz na promoção de habilidades essenciais, como resolução de problemas, pensamento crítico e colaboração. Ao programar robôs para realizar tarefas específicas, os alunos aplicam conceitos matemáticos de maneira prática e exploratória. Esse método ativo de aprendizagem está em consonância com a visão de Papert (1980), que defendia que a aprendizagem deve ser construída por meio de ação e experimentação, utilizando a tecnologia como meio para alcançar o conhecimento.

Diversos estudos, como o de Koehler et al. (2016), demonstram que os alunos que participam de atividades de robótica apresentam maior interesse e motivação para aprender matemática. Além disso, a robótica proporciona uma maneira tangível de conectar novos conhecimentos a conceitos previamente adquiridos, o que é enfatizado por Ausubel (1963) como sendo fundamental para uma aprendizagem significativa. A robótica educacional também promove habilidades como colaboração, comunicação e pensamento crítico, preparando os alunos para os desafios do século XXI (Partnership For 21st Century Skills, 2009). Papert acreditava que as tecnologias poderiam democratizar a educação, permitindo que os alunos se tornassem construtores ativos de seu próprio conhecimento, em vez de meros receptores de informações.

Embora a robótica educacional ofereça inúmeras vantagens, também existem desafios a serem enfrentados. A formação de professores é um aspecto fundamental, pois é necessário que os educadores estejam preparados e confiantes para integrar a robótica no currículo de matemática (Lappan, 1999). A disponibilidade de recursos, como kits de robótica e acesso à tecnologia, pode ser uma barreira em algumas escolas, mas pode ser contornada com o uso de ambientes virtuais de simulação, como demonstrado nos trabalhos de Macedo e Souza (2023) e Macedo e Souza (2024), com o ambiente CoppeliaSim, que foi utilizado para explorar gráficos de funções polinomiais de segundo grau e funções exponenciais por meio da trajetória de um robô.

De acordo com Fernandes et al. (2006), o engajamento dos alunos nas atividades de matemática deve ir além do cumprimento de um programa curricular, devendo despertar um interesse genuíno. O uso de robôs, nesse sentido, tem um papel relevante como mediador, proporcionando um ambiente mais interativo e motivador. Assim, a robótica educacional oferece uma abordagem inovadora e eficaz para o ensino de matemática, permitindo que os alunos

aprendam de maneira prática e envolvente. Ao promover a aprendizagem ativa, a motivação e o desenvolvimento de habilidades essenciais para o século XXI, a robótica se consolida como uma ferramenta pedagógica valiosa para o ensino de matemática.

3 ROBOTSTUDIO

O simulador RobotStudio é baseado no controle virtual ABB (ABB VirtualController); ele é uma cópia do software real que executa os robôs da ABB (Asea Brown Boveri). O programa permite fazer simulações realistas, como as que são feitas com os robôs da ABB. O programa precisa de licença, mas existem versões com licença livre para instituições de ensino, obtida por meio de um cadastro no site da empresa ABB Robotics.

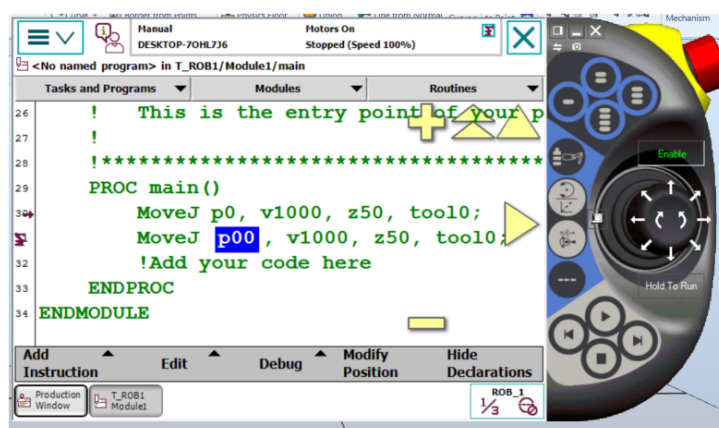
O RobotStudio é uma poderosa plataforma de simulação e programação offline desenvolvida pela ABB, projetada para configurar, programar e otimizar robôs industriais em um computador comum, sem a necessidade de interromper a produção no mundo real. Baseado na tecnologia VirtualRobot da ABB, o software oferece visualização 3D ultra-realista, capacidade de programar robôs reais e virtuais, além de um conjunto de ferramentas que inclui editor de código RAPID, analisador de sinais e o Virtual FlexPendant, que proporciona controle e monitoramento intuitivo do robô. O RobotStudio também permite a importação de diversos formatos CAD, possibilitando a modelagem precisa de ambientes de produção e células de trabalho robóticas, além de facilitar a transferência fluida de programas entre robôs virtuais e físicos.

Do ponto de vista pedagógico, o RobotStudio se apresenta como um ambiente de aprendizagem acessível e envolvente, para que os alunos explorem conceitos de robótica, matemática e automação, sem os riscos ou custos associados ao uso de equipamentos físicos. Ao possibilitar que os estudantes projetem, simulem e testem comportamentos robóticos em um ambiente visual e interativo, a plataforma favorece o desenvolvimento do pensamento matemático, das habilidades de resolução de problemas e de competências interdisciplinares. A interdisciplinaridade manifesta-se especialmente na resolução de problemas do mundo real, nos quais se articulam conceitos de robótica, matemática, engenharia e tecnologia de forma integrada e contextualizada. Os alunos podem refinar suas soluções de forma iterativa, analisar os resultados em tempo real e adquirir experiência prática com ferramentas de padrão industrial, tornando conceitos abstratos das áreas STEM acessíveis e diretamente aplicáveis a situações reais.

Essa abordagem não apenas aprimora a proficiência técnica, como também estimula a colaboração, a criatividade e o pensamento crítico nos ambientes educacionais. Os robôs da ABB podem ser programados por diferentes métodos, incluindo o uso do *teach-pendant*, da linguagem de programação RAPID, própria do RobotStudio, ou diretamente pela interface tridimensional do próprio RobotStudio. A abordagem mais comum envolve a utilização do ambiente 3D, no qual a programação é realizada com base na compreensão da geometria en-

volvida nas tarefas atribuídas ao robô. Para usuários com maior nível de proficiência, a escolha do método torna-se secundária, uma vez que as instruções podem ser integradas e sincronizadas entre as diferentes interfaces de programação de forma eficiente. O *teach-pendant* é um dispositivo eletrônico especializado, equipado com joystick, que permite ao operador controlar manualmente cada junta do robô de forma individual, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Teach – pendant



Fonte: RobotStudio.

Já o RAPID é uma linguagem de programação de alto nível, exclusiva para o controle de robôs industriais da ABB. Apesar de sua robustez, a programação em RAPID pode apresentar elevado grau de complexidade, sendo muitas vezes desnecessária para usuários que não atuam diretamente no desenvolvimento da plataforma de simulação, especialmente em contextos educacionais.

De acordo com Ming e Fang (2019), um sistema de robótica industrial completo é formado pelo corpo principal do robô, servomotor, redutor, manual de instruções, controladores e seus equipamentos periféricos (como câmeras e módulos de entrada e saída), etc. Neste trabalho, consideraremos o IRB 120, um robô industrial da ABB, como ilustra a Figura 2.

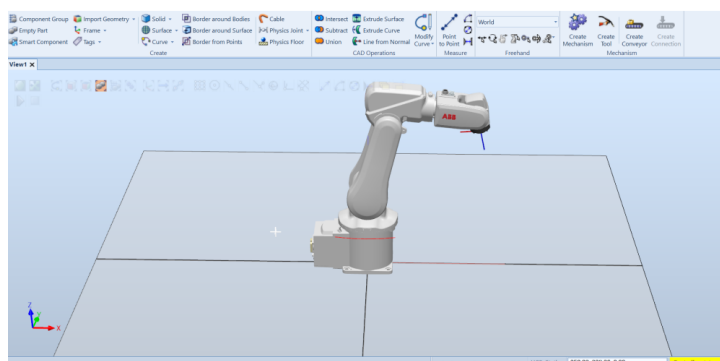
Figura 2 – IRB 120



Fonte: Canadian Packaging.

Um robô industrial pode ter valores superiores a 30 mil reais. Em um contexto educacional, é inviável construir um laboratório para simulações. Nesse sentido, usar simuladores pode proporcionar uma sensação de proximidade e oportunizar a exploração do robô, além de desenvolver aprendizagens em ciência, engenharia e matemática. Utilizaremos o simulador do IRB 120, como ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Simulador do IRB 120



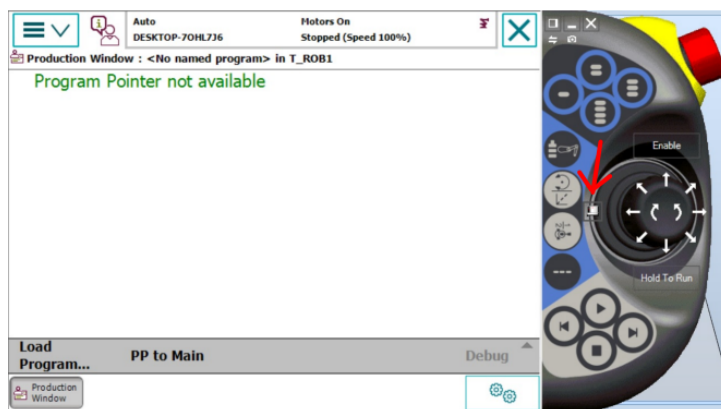
Fonte: RobotStudio.

O IRB 120 é um robô com 580 mm de altura, pesando 3 kg e com faixa de rotação do eixo X de $+165^{\circ}$ a -165° , podendo executar as seguintes tarefas dentro da produção: solda, corte, pintura, paletização, transporte de peças e montagem. O IRB 120 é ideal para uma ampla gama de indústrias, como, por exemplo, os setores eletrônico, de alimentos e bebidas, maquinário, solar, farmacêutico, médico e de pesquisa.

O RobotStudio possui três diferentes tipos de movimentos que podem ser executados diretamente por meio do *teach-pendant*, que são: moveL (movimento em linha reta), moveC (movimento circular) e moveJ (movimento das juntas). Para que esses movimentos sejam executados, necessitamos de criatividade para que tenhamos precisão na tarefa. Neste trabalho, utilizaremos apenas os movimentos moveL e moveJ. Para ter acesso ao *teach-pendant*, após

abrir o simulador RobotStudio e escolher o IRB 120, pressione as teclas Ctrl e F5. Por meio do *teach-pendant*, colocaremos o robô no modo de trabalho manual, clicando sobre o ícone destacado com a seta em vermelho, como ilustra a Figura 4.

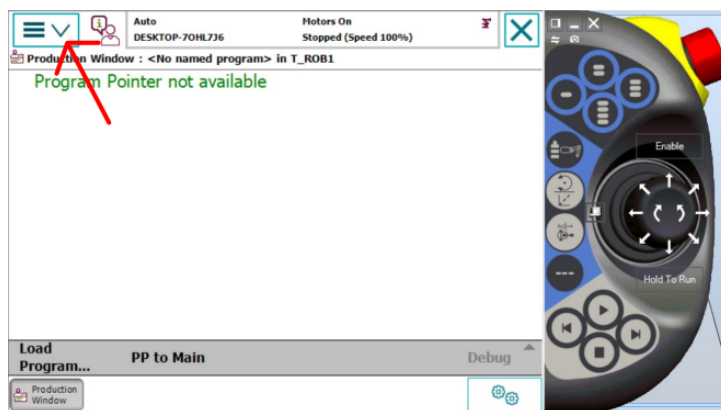
Figura 4 – Chave para acionamento manual



Fonte: RobotStudio.

Em seguida basta colocar a chave bem no centro. Com o robô no modo manual teremos acesso ao código editável, clicando sobre o ícone no canto superior esquerdo do *teach-pendant* destacado em vermelho, como ilustra a Figura 5.

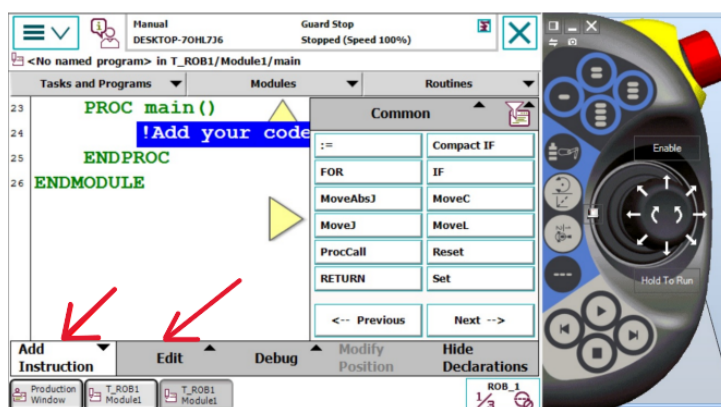
Figura 5 – Ícone para acesso ao código



Fonte: RobotStudio.

Em seguida, duas colunas serão exibidas. Clicando sobre o ícone Program Editor, que se encontra na primeira coluna, teremos acesso ao código editável, o qual poderá ser modificado escolhendo a opção Edit na barra de tarefas localizada na parte inferior, como ilustra a Figura 6. Finalmente, ao clicar na opção Add Instruction, também na barra de tarefas inferior, teremos acesso, no lado direito do código, às opções de movimento, como ilustra a Figura 6.

Seguindo os passos ilustrado na Figura 6 e com noção de geometria e álgebra básica é possível fazer o braço robótico funcionar, com precisão.

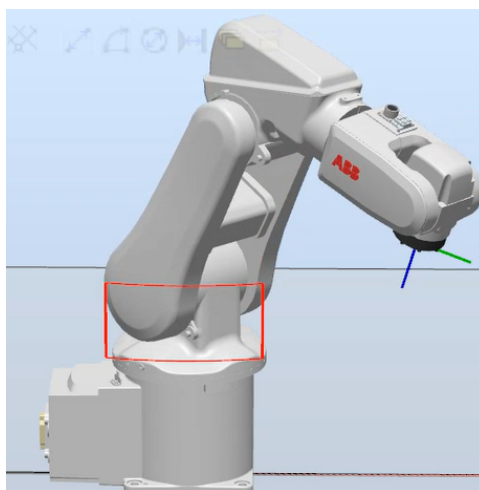
Figura 6 – Ícone para acesso aos movimentos

Fonte: RobotStudio.

4 O CILINDRO ATRAVÉS DE OPERAÇÕES COM MATRIZES

Considerando que o braço robótico IRB 120 depende da compreensão geométrica e das coordenadas espaciais, nesta seção utilizaremos o produto de matrizes de ordem 3, multiplicadas por uma matriz coluna. Essa abordagem permitirá atribuir funcionalidade ao IRB 120, apresentando uma forma de resolver um problema do mundo real por meio de operações com matrizes. A utilização de matrizes possibilita o planejamento e a execução dos movimentos do robô com alta precisão. Para garantir a execução eficiente da tarefa, é necessário um conhecimento prévio sobre a atividade a ser realizada.

Vamos imaginar a seguinte situação: o IRB 120 precisa realizar uma tarefa específica, como solda, pintura ou transporte de peças, ao longo de um percurso preestabelecido sobre uma superfície cilíndrica. Nesse cenário, o robô deve executar a tarefa com precisão sobre um desenho tridimensional projetado sobre essa superfície, destacado em vermelho, conforme ilustrado na Figura 7.

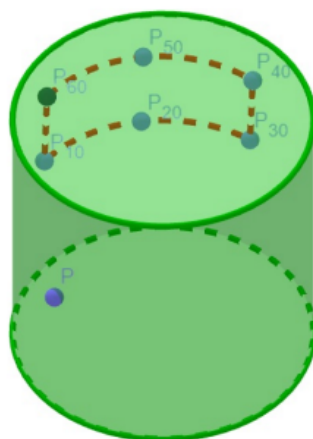
Figura 7 – Trabalho que será realizado pelo IRB 120

Fonte: RobotStudio.

Para que o movimento seja realizado de modo preciso, necessitamos determinar o lugar geométrico por onde a garra do IRB 120 deve passar. Neste trabalho, não levaremos em consideração a garra específica que será utilizada. Um problema como esse, apresentado a um estudante com conhecimento aprofundado em álgebra linear, geometria analítica ou cálculo diferencial e integral, seria facilmente solucionado, devido à maturidade matemática que o estudante possui. Porém, para pessoas que possuem apenas conhecimento básico em matemática, ou seja, estudantes da educação básica, esse pensamento matemático, que é a capacidade de resolver problemas, poderá ser mais exigente.

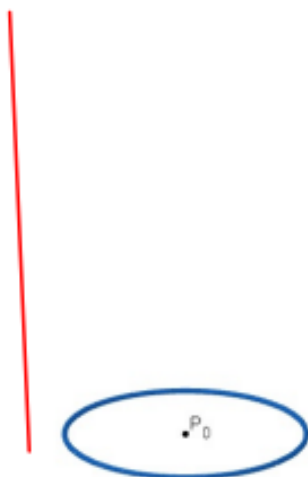
A nova indústria exige profissionais com conhecimento básico em matemática que tenham criatividade matemática para trabalhar com ferramentas como o IRB 120. Com base no trabalho de Oliveira e Souza (2020), obtemos uma alternativa para esse problema, representando o lugar geométrico que descreve um cilindro utilizando apenas operações com matrizes. Ou seja, partindo do trabalho dos autores, conseguimos caracterizar todos os pontos ao longo de um cilindro, como ilustra a Figura 8, por meio de matrizes.

Figura 8 – Figura espacial sobre o cilindro



Fonte: os autores.

Mais especificamente, Oliveira e Souza (2020), escreveram uma circunferência com centro na origem, através do produto de matrizes. Seguindo a mesma notação apresentada neste trabalho, seja C_r uma circunferência com centro sobre a origem representada através da matriz transposta $O = [0,0]^t$ e raio $r > 0$, e seja L um segmento de reta de comprimento h que intersecta perpendicularmente o plano que contém a circunferência em apenas um ponto, como ilustra a Figura 9.

Figura 9 – Segmento de reta L perpendicular ao plano

Fonte: Os autores.

O conjunto de todos os segmentos de reta paralelos a L que intersectam C_r chama-se cilindro circular reto de altura h e raio $r > 0$. Denotaremos tal cilindro por $C_r(h)$, como ilustra a figura 9. A circunferência C_r chama-se diretriz do cilindro e cada segmento de reta que passa por C_r paralela a L chama-se geratriz do cilindro.

Cada elemento Q pertencente ao cilindro $C_r(h)$ é um ponto sobre uma geratriz, sendo assim, o elemento Q pertence a um plano paralelo a C_r e, portanto, pode ser representado por uma matriz coluna $Q = [w \ z]^t$ tal que z pertence ao segmento de reta L e w pertence a circunferência C_r . De acordo com Oliveira e Souza (2020), podemos representar os pontos de C_r através do produto de uma matriz de ordem 2, assim podemos considerar $w = [x \ y]^t$. Isso é,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue que cada ponto sobre um cilindro é dado, através de uma matriz coluna, da seguinte maneira $Q = [x \ y \ z]^t$ tal que $[x \ y]^t$ é um ponto sobre a circunferência C_r e z pertence a L. A recíproca é imediata, portanto, um cilindro $C_r(h)$ com diretriz C_r e geratriz L é dado da seguinte maneira:

$$C_r(h) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 \leq z \leq h \right\} \quad (1)$$

Denotaremos por

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

e por

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a igualdade $AA^t = A^t A = I$, obtemos que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \frac{xy_0 + x_0y}{r^2} \\ \frac{xy_0 + x_0y}{r^2} & \frac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix},$$

onde $[x_0, y_0]^t$ e $[x, y]^t$ são pontos sobre a circunferência de centro na origem e raio $r > 0$. Em particular, se $x_0 = r$ e $y_0 = 0$, então

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix}$$

Dessa forma obtemos todos os pontos sobre o cilindro circular reto de altura h e raio $r > 0$, através da expressão:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & 0 \\ \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\frac{x}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : r \geq x \geq -r, 0 \leq z \leq h \right\}. \quad (2)$$

Em particular, as matrizes colunas

$$P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

pertencem ao cilindro.

5 PROPOSTA DIDÁTICA

Apresentaremos uma proposta didática composta por uma única atividade, que pode ser desenvolvida por um grupo de cinco alunos. Para os demais grupos de estudantes, basta modificar as informações sobre a tarefa que o robô realizará. A proposta é voltada para os estudantes do 3º ano do Ensino Médio ou estudantes de Curso Técnico Profissionalizante e será desenvolvida ao longo de três aulas, com duração de 50 minutos cada.

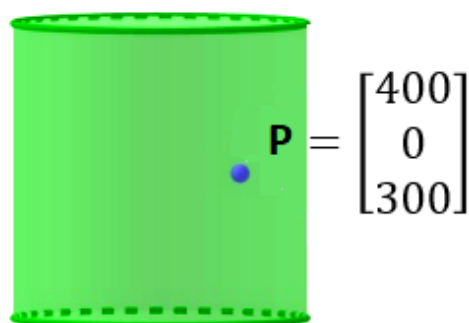
A primeira aula será dedicada à explicação da relação entre matrizes e a noção espacial de cilindro, seguindo o que foi feito na seção anterior. A segunda aula tem como objetivo apresentar o funcionamento do braço robótico e explicar como ele depende da relação entre matrizes e a noção de cilindro. No terceiro encontro, será realizada a atividade prática com os alunos, que pode ser desenvolvida no laboratório de informática. Durante essa atividade, os alunos utilizarão o simulador RobotStudio, aplicando a noção de matrizes para realizar um trabalho prático sobre o cilindro.

A proposta visa que os alunos compreendam as noções de matrizes e como essas estão relacionadas com o conceito de cilindro, além de entenderem o funcionamento de um braço robótico e sua aplicação prática. Além disso, os alunos serão desafiados a aplicar esse conhecimento em atividades que envolvem o uso de tecnologia e resolução de problemas reais. A metodologia está em consonância com a abordagem da aprendizagem significativa, pois busca que os alunos relacionem os novos conceitos com seus conhecimentos prévios de maneira substancial e não arbitrária, conforme defendido por Ausubel (1963).

É importante que, antes da aplicação da proposta, o professor tenha trabalhado com os alunos a noção teórica de matrizes e a geometria relacionada ao cilindro, pois, dessa forma, durante as três aulas, o professor apresentará essas etapas de aprendizagem. O objetivo final da proposta é que os alunos consigam visualizar e utilizar aplicações de matemática e de tecnologia na resolução de problemas do mundo real, além de desenvolverem habilidades importantes para o mercado de trabalho atual, como o pensamento matemático e o uso de novas tecnologias. Essa abordagem busca envolver os alunos de maneira ativa e promover o engajamento com os conteúdos, concordando com Daniela (2018).

Para essa atividade, considera-se um cilindro representando o espaço de trabalho do robô IRB 120, com raio de 400 milímetros e altura de 800 milímetros, tomando-se como referência a base do robô. Ao adotar essa mesma base como origem do sistema de coordenadas, os alunos poderão observar que, a uma altura de 300 milímetros, localizam-se os pontos P e P_* sobre a superfície lateral do cilindro, definidos por meio de matrizes coluna expressos em milímetros, da seguinte maneira: $P = [400 \ 0 \ 300]^t$ e $P_* = [-400 \ 0 \ 300]^t$, como ilustra a Figura 10.

Figura 10 – matriz $[400 \ 0 \ 300]^t$ sobre o cilindro



Fonte: Os autores.

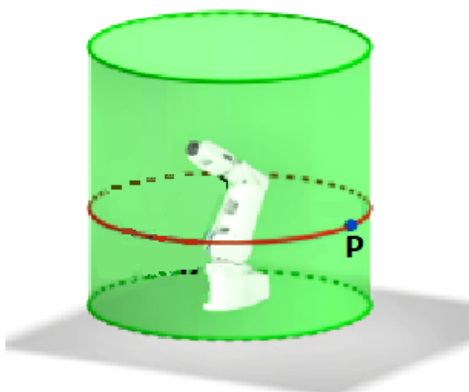
Do mesmo modo, as matrizes colunas $Q = [400 \ 0 \ 400]^t$ e $Q_* = [-400 \ 0 \ 400]^t$ sobre a diretriz de altura 400 milímetros é imediatamente determinada pelos estudantes, pois a seção anterior garante estas matrizes sobre o cilindro. Seguindo a notação do joystick do IRB 120, o professor, juntamente com os estudantes, definirá as extremidades dos arcos sobre o cilindro que o robô deverá percorrer, por P_{10} , P_{20} , P_{30} , P_{40} , P_{50} e P_{60} , onde P_{10} , P_{20} e P_{30} são lugares geométricos que formam um arco, compreendido entre P e P_* , sobre a diretriz de altura 300 milímetros; de tal modo que os arcos com extremidades P e P_{10} , P_{30} e P_* tenham o mesmo comprimento, e igual a dois terços do comprimento do arco com extremidades P_{10} e P_{30} ; com P_{20} dividindo esse arco em duas partes iguais.

Por sua vez P_{40} , P_{50} e P_{60} são lugares geométricos que formam um arco, compreendido entre $Q = [400 \ 0 \ 400]^t$ e $Q_* = [-400 \ 0 \ 400]^t$ sobre a diretriz de altura 400 milímetros; de tal modo que os arcos com extremidades Q e P_{40} , P_{60} e Q_* tenham o mesmo comprimento, e igual a dois terços do comprimento do arco com extremidades P_{40} e P_{60} ; com P_{50} dividindo esse arco em duas partes iguais, como ilustra a Figura 8 acima.

Assim, partindo da matriz coluna P e utilizando a expressão (1), através do seguinte produto de matrizes com $400 > x > -400$ é possível sair do ponto P e percorrer toda a semicircunferência sobre a diretriz de altura 300 milímetros seguindo o trajeto ilustrado na Figura 11.

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{400} & -\frac{\sqrt{(400)^2 - x^2}}{400} & 0 \\ -\frac{\sqrt{(400)^2 - x^2}}{400} & -\frac{x}{400} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 300 \end{bmatrix}$$

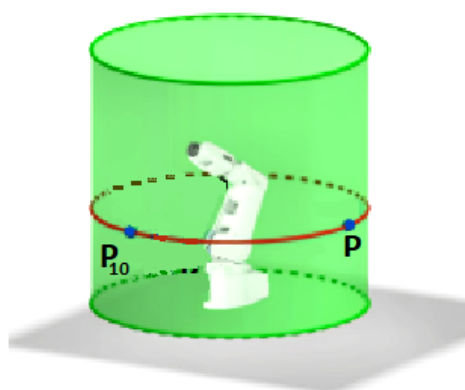
Figura 11 – Trajetória sobre o cilindro partindo de P



Fonte: Os autores.

Em particular, tomando $x = -100$, na expressão acima os estudantes irão calcular a matriz coluna que representa sobre o cilindro o lugar geométrico P_{10} . A matriz correspondente será dada por $P_{10} = [-100 \ -387,3 \ 300]^t$, como ilustra a Figura 12.

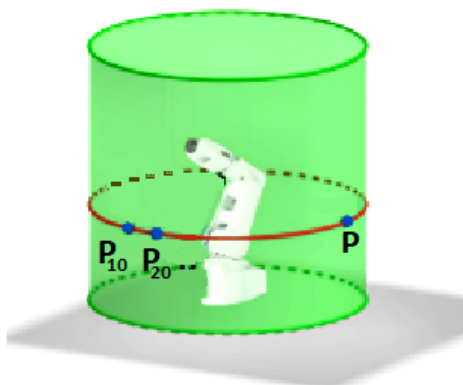
Figura 12 – Representação de P10 sobre o cilindro



Fonte: Os autores.

Além disso, tomando $x = 0$, os estudantes irão calcular a matriz coluna que representa, sobre o cilindro, o lugar geométrico P_{20} . A matriz correspondente será dada por $P_{20} = [0 \ -400 \ 300]^t$ como ilustra a Figura 13.

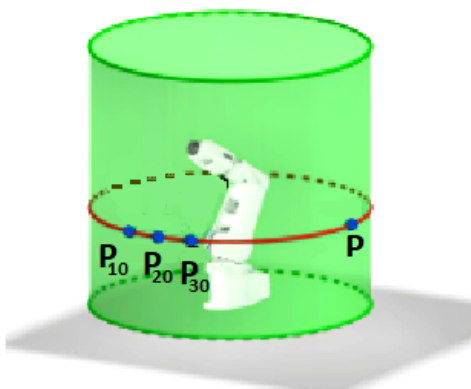
Figura 13 – Representação de P_{20} sobre o cilindro



Fonte: Os autores.

Por sua vez, considerando $x = 100$, na expressão acima, os estudantes irão calcular a matriz coluna que representa, sobre o cilindro, o lugar geométrico P_{30} . A matriz correspondente será dada por $P_{30} = [100 \ -387,3 \ 300]^t$, como ilustra a Figura 14.

Figura 14 – Representação de P_{30} sobre o cilindro

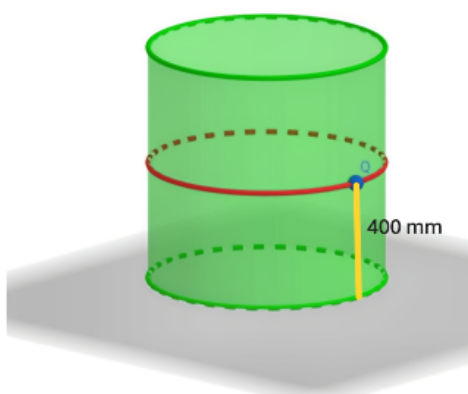


Fonte: Os autores.

Após encontrar os pontos dados, através das matrizes coluna P_{10} , P_{20} , P_{30} a próxima etapa consiste em determinar P_{40} , P_{50} e P_{60} definidos através das matrizes coluna. Como P_{40} , P_{50} e P_{60} são lugares geométricos que formam um arco, compreendido entre $Q = [400 \ 0 \ 400]^t$ e $Q_* = [-400 \ 0 \ 400]^t$ sobre a diretriz de altura 400 milímetros continuando o processo, através da equação (1), por meio do seguinte produto de matrizes com $400 > x > -400$. Ou seja, através desse produto de matrizes é possível sair de Q e percorrer toda a semicircunferência sobre a diretriz de altura 400 milímetros seguindo o trajeto ilustrado na Figura 15.

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{400} & -\frac{\sqrt{(400)^2 - x^2}}{400} & 0 \\ -\frac{\sqrt{(400)^2 - x^2}}{400} & -\frac{x}{400} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}$$

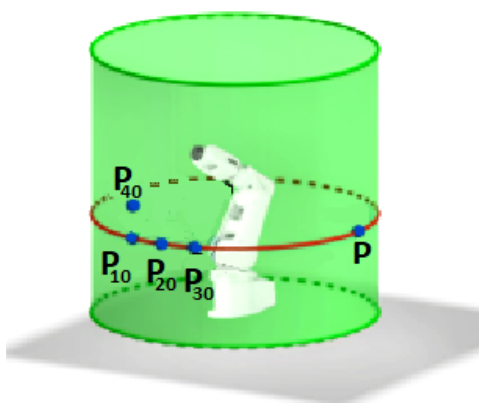
Figura 15 – Semicircunferência posicionada a 400 mm de altura em relação a uma base



Fonte: Os autores.

Em particular, tomando $x = -100$, no produto de matrizes acima, os estudantes irão calcular a matriz coluna que representa, sobre o cilindro, o lugar geométrico P_{40} . A matriz correspondente será dada por $P_{40} = [-100 \ -387,3 \ 400]^t$, como ilustra a Figura 16.

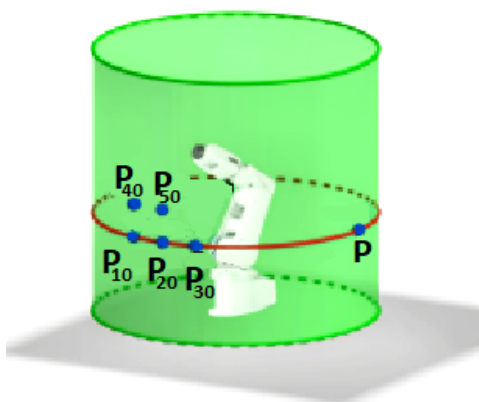
Figura 16 – Representação de P_{40} sobre o cilindro



Fonte: Os autores.

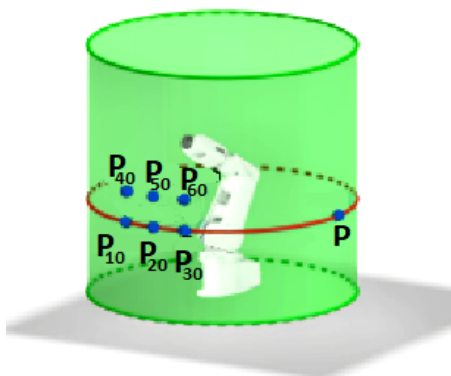
Além disso, tomando $x = 0$, os estudantes irão calcular a matriz coluna que representa, sobre o cilindro, o lugar geométrico P_{50} . A matriz correspondente será dada por $P_{50} = [0 \ -400 \ 400]^t$, como ilustra a Figura 17.

Figura 17 – Representação de P_{50} sobre o cilindro



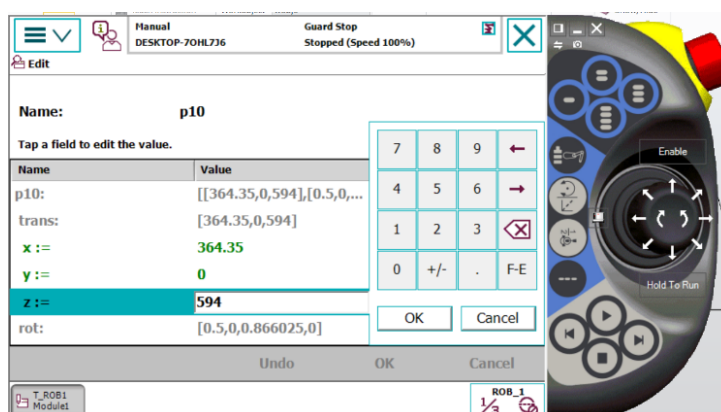
Fonte: Os autores.

Por sua vez, considerando $x = 100$, os estudantes irão calcular a matriz coluna que representa, sobre o cilindro, o lugar geométrico P_{60} . A matriz correspondente será dada por $P_{60} = [100 \ -387,3 \ 400]^t$, como ilustra a Figura 18.

Figura 18 – Representação de P_{60} sobre o cilindro

Fonte: Os autores.

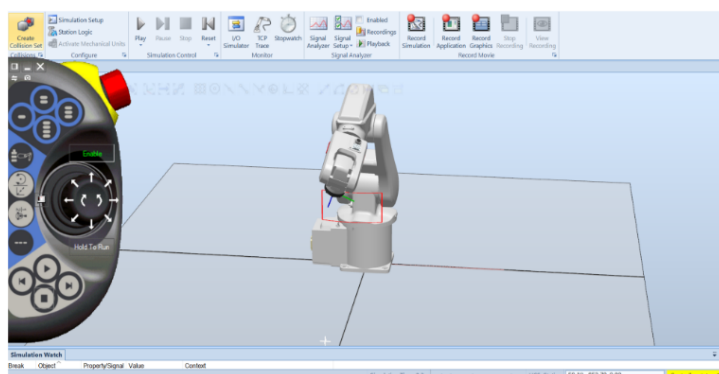
Após definir os pontos de forma geométrica, a próxima etapa consiste em ensinar ao IRB 120 como executar a tarefa ilustrada na Figura 7. Para isso, utilizando os pontos P_{10} , P_{20} , P_{30} , P_{40} , P_{50} e P_{60} definidos através das matrizes coluna, o professor orientará os alunos no uso do comando `moveJ` no *teach-pendant*, como ilustra a Figura 19.

Figura 19 – Atribuindo as coordenadas no joystick

Fonte: Os autores.

Dessa forma, o braço robótico IRB 120 está programado para seguir a trajetória desejada, como ilustra a Figura 20.

Figura 20 – IRB 120 realizando a tarefa planejada



Fonte: Os autores.

Por meio dessa atividade, o professor consegue envolver os alunos na aplicação de conceitos matemáticos, como matrizes e noção espacial de cilindro, no contexto de um problema prático. Além disso, o uso do IRB 120 e do simulador RobotStudio proporciona uma experiência de aprendizado ativo, em que os alunos são desafiados a aplicar a teoria na resolução de um problema real, alinhando-se aos princípios da aprendizagem significativa, conforme defendido por Ausubel (1963).

Ao final da proposta, espera-se que os alunos compreendam como a matemática, especialmente a geometria e as operações com matrizes, pode ser aplicada no controle de um robô para realizar tarefas práticas. Esse aprendizado será potencializado por meio do uso de tecnologias como o RobotStudio, promovendo o desenvolvimento de habilidades essenciais para o mercado de trabalho atual, como a resolução colaborativa de problemas, o que está de acordo com os requisitos apontados por Elbestawi et al. (2018).

Além disso, os estudantes serão avaliados de forma contínua, considerando sua participação ativa nas atividades, a compreensão dos conceitos abordados e a execução correta das tarefas propostas. A avaliação será orientada pela observação da colaboração dos alunos durante as discussões em grupo e na resolução do problema, sendo fundamental a troca de ideias e o engajamento de todos na busca por soluções para os desafios propostos. A habilidade de trabalhar em equipe será um ponto-chave para o sucesso da atividade.

A compreensão dos conceitos matemáticos também será um aspecto central da avaliação. O professor observará o nível de entendimento dos estudantes sobre as relações entre matrizes, a geometria dos cilindros e como esses conceitos são aplicados no controle do robô. A capacidade de integrar teoria e prática será um fator importante para a avaliação do aprendizado.

Durante a execução do trabalho prático com o simulador, a precisão nas movimentações do robô será observada. A realização correta das trajetórias definidas pelas matrizes e o uso adequado dos comandos `moveJ` e `moveL` para programar o robô também serão avaliados. A

resolução do problema de obtenção das matrizes-colunas por meio de operações com matrizes será outro critério relevante, destacando a importância da aplicação prática dos conceitos aprendidos de maneira eficiente.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, utilizamos o ambiente de simulação RobotStudio para desenvolver uma proposta interdisciplinar, articulando saberes da matemática, robótica, engenharia e tecnologia em um contexto educativo. Os conceitos matemáticos de matrizes e cilindros são trabalhados de forma integrada com situações práticas, favorecendo a construção do conhecimento por meio da aplicação concreta e significativa dos conteúdos. Essa abordagem amplia a compreensão dos estudantes, ao mesmo tempo em que promove o desenvolvimento do pensamento crítico, criativo e tecnológico, competências fundamentais para a formação diante das demandas da indústria 4.0. A proposta está em sintonia com os princípios da educação STEM, que busca aproximar os conteúdos escolares da realidade, incentivando a aprendizagem ativa e contextualizada.

Em todo o trabalho, não consideramos a tarefa específica que está sendo realizada, o que afeta diretamente o bom funcionamento do robô. Caso essa tarefa seja levada em conta e quanto mais matrizes que representem o percurso do braço robótico sejam conhecidas, mais preciso torna-se o trabalho executado. Essas possibilidades são intencionalmente deixadas em aberto para que os professores possam explorá-las com seus alunos em sala de aula, estimulando a análise, a experimentação e a criação de diferentes soluções. A partir da imaginação e da intencionalidade pedagógica do professor, surgem oportunidades para o desenvolvimento de projetos interdisciplinares que integrem matemática, robótica, engenharia e tecnologia, em perfeita sintonia com a proposta STEM, que valoriza a aprendizagem ativa, contextualizada e conectada aos desafios do mundo contemporâneo.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David P. **The psychology of meaningful verbal learning**. Nova Iorque: Grune Stratton, 1963.

BYBEE, Rodger W. **The case for STEM education: Challenges and opportunities**. 2013. Disponível em: <<https://my.nsta.org/resource/100199/the-case-for-stem-education-challenges-and-opportunities-e-book>> Acesso em: 18 nov. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <<https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>> Acesso em: 29 abr. 2025.

BREINER, Jonathan M. et al. What is STEM? A discussion about conceptions of STEM in education and partnerships. **School science and mathematics**, v. 112, n. 1, p. 3-11, 2012. Disponível em: <https://www.academia.edu/download/31936605/ssm_109.pdf>.

CHEN, Chin-Sung; LIN, Jing-Wen. A practical action research study of the impact of maker-centered STEM-PjBL on a rural middle school in Taiwan. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 17, n. Suppl 1, p. 85-108, 2019.

CANADIAN PACKAGING. **L'Oréal's hair to the throne**. Disponível em: <https://www.canadianpackaging.com/sustainability/loreal-hair-to-the-throne-33549/attachment/abb-irb-120-robot/>. Acesso em: 8 set. 2022.

CHAIDI, Eirini et al. Educational robotics in Primary Education. A case in Greece. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 9, p. e17110916371-e17110916371, 2021.

DANIELA, Linda (Ed.). **Innovations, technologies and research in education**. Cambridge Scholars Publishing, 2018.

ELBESTAWI, Mo et al. SEPT learning factory for industry 4.0 education and applied research. **Procedia manufacturing**, v. 23, p. 249-254, 2018. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2351978918304979>>.

FERNANDES¹⁴, Elsa; FERMÉ, Eduardo; OLIVEIRA, Rui. Using robots to learn functions in math class. **Technology Revisited**, p. 152, 2006. Disponível em: <<https://www.academia.edu/download/31634259/icmi17proceedingspart2.pdf#page=152>>

GONZALEZ, Heather B.; KUENZI, Jeffrey J. **Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) education: A primer**. CRS report for congress, R42642, August, 2012.

GLEASON, Nancy W. **Higher education in the era of the fourth industrial revolution**. Singapore: Springer Nature, 2018.

HINOJO-LUCENA, Francisco-Javier et al. Scientific Performance and Mapping of the Term STEM in Education on the Web of Science. **Sustainability**, v. 12, n. 6, p. 2279, 2020.

KOEHLER, Matthew J.; MISHRA, Punya (Ed.). **Handbook of technological pedagogical content knowledge (tpack) for educators**. Routledge, 2016.

KUMAR, Deepak. Introduction to special issue on robotics in undergraduate education. **Journal on Educational Resources in Computing (JERIC)**. v. 4, n. 2, p. 1-es, 2004

LAPPAN, Glenda. National Council of Teachers of Mathematics: Revitalizing and Refocusing Our Efforts. **Mathematics Teaching in the Middle School**. v. 5, n. 2, p. 130-136, 1999.

MACEDO, Cássio Lima; SOUZA, Cleidinaldo Aguiar. Função polinomial do segundo grau com o Lumibot-CoppeliaSim, **Revista do Professor de Matemática Online**. v. 11, n. 02, p. 295-314, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1118>>.

MALEC, Jacek. Some thoughts on robotics for education. In: AAAI SPRING SYMPOSIUM ON ROBOTICS AND EDUCATION, 2001, Menlo Park, CA, USA. Menlo Park, CA, USA: AAAI, 2001.

MACEDO, Cássio Lima; SOUZA, Cleidinaldo Aguiar. Proposição de atividades com o uso do Lumibot-Coppelasim para a aprendizagem do conceito de função exponencial. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**. , v. 11, n. 31, p. 1-21, 2024.

MING, Li; FANG, Ren. Application of industrial robot in automatic forging production line [J]. **Forging and stamping**, v. 17, p. 64-66, 2019.

MURY, Sophia Reyes et al. How to support teachers to carry out educational robotics activities in school? The case of Roteco, the Swiss robotic teacher community. In: **Frontiers in Education**. Frontiers Media SA, 2022. p. 968675.

MUÑOZ, Lilia et al. La robótica educativa, una herramienta para la enseñanza-aprendizaje de las ciencias y las tecnologías. **TESI**, Salamanca, España, v. 13, n. 2, p. 74-90, 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/255995599_La_robotica_educativa_una_herramienta_para_la_ensenanza-aprendizaje_de_las_ciencias_y_las_tecnologias>

NAYA, Martin et al. A versatile robotic platform for educational interaction. In: **2017 9th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS)**. IEEE, 2017. p. 138-144.

OLIVEIRA, Marina França; SOUZA, Cleidinaldo Aguiar. A circunferência de centro na origem como produto de matrizes. **Professor de Matemática online-PMO**, v. 8, p. 535-550, 2020.

PAPERT, Seymour. Children, computers and powerful ideas. **Harvester Press (United Kingdom)**, v. 10, p. 978-3, 1980.

PARTNERSHIP FOR 21ST CENTURY SKILLS. **P21 framework definitions**. ERIC Clearinghouse, 2009.

PRATAMA, Irfan et al. A review of missing values handling methods on time-series data. In: **2016 international conference on information technology systems and innovation (ICITSI)**. IEEE, 2016. p. 1-6.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. STEM education in the Brazilian context: An ethnomathematical perspective. In: **STEM education in the junior secondary: The state of play**. Singapore: Springer Singapore, 2017. p. 221-247.

STRUYF, Annemie et al. Students' engagement in different STEM learning environments: Integrated STEM education as promising practice?. **International Journal of Science Education** v. 41, n. 10, p. 1387-1407, 2019.

TAKACS, Arpad et al. Teacher's kit: Development, usability, and communities of modular robotic kits for classroom education. **IEEE Robotics & Automation Magazine**, v. 23, n. 2, p. 30-39, 2016.

TRAPERO-GONZÁLEZ, Irene et al. Didactic impact of educational robotics on the development of STEM competence in primary education: a systematic review and meta-analysis. In: **Frontiers in Education**. Frontiers Media SA, 2024. p. 1480908. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/journals/education/articles/10.3389/educ.2024.1480908/full>>

YILDIRIM, Bekir; SELVI, Mahmut. Examination of the effects of STEM education integrated as a part of science technology society and environment courses. **Journal of human sciences**, v. 13, n. 3, 2016.

YATA, Chikahiko; OHTANI, Tadashi; ISOBE, Masataka. Conceptual framework of STEM based on Japanese subject principles. **International Journal of STEM Education**, v. 7, p. 1-10, 2020. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1186/s40594-020-00205-8>>