



## A Construção de um Helicoide Mínimo Apoiado em Duas Retas Reversas\*

The Construction of a Minimal Helicoid Supported by Two Skew Lines

José Fernando Ugoski Silveira<sup>1</sup>  
Lisandra de Oliveira Sauer<sup>2</sup>

### Resumo

Neste artigo, trabalhamos com um problema envolvendo uma subárea da matemática conhecida como Geometria Diferencial, mais especificamente, com os helicoides mínimos, cuja projeção em um plano perpendicular ao eixo do helicoides não forma um círculo. A metodologia adotada foi baseada na consulta a livros e artigos relacionados à área, bem como na reflexão sobre os conceitos associados ao tema em questão, a fim de obter um método capaz de parametrizar esses helicoides a partir de duas retas reversas quaisquer. O estudo se dividiu em dois momentos, sendo o primeiro responsável pela verificação da curvatura média do helicoides e o segundo focado em como obter um método capaz de parametrizá-los. Para tal, no primeiro momento, introduziu-se a definição de superfície regradada, além de definições de conceitos e proposições necessárias para a verificação de que o helicoides é uma superfície mínima. Vale ressaltar que esses conceitos podem ser facilmente encontrados em materiais de introdução à Geometria Diferencial, sendo a inovação deste trabalho o método obtido no segundo momento. Além disso, aplicações dos helicoides na arquitetura são apresentadas, exemplificando seu potencial estético e estrutural tanto nessa área quanto na construção civil.

**Palavras-chave:** Superfícies mínimas. Helicoide mínimo. Retas reversas.

\*Submetido em 14/05/2024 - Aceito em 27/03/2025

<sup>1</sup>Graduando de Licenciatura em Matemática pela UFPel, Brasil – jsilveira74@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Doutora em Matemática. Professora do Instituto de Física e Matemática da UFPel, Brasil – lisandra.sauer@ufpel.edu.br

### Abstract

In this article, we addressed a problem involving a subfield of mathematics known as Differential Geometry, specifically focusing on minimal helicoids whose projection onto a plane perpendicular to the helicoid axis does not form a circle. The methodology employed was based on consulting books and articles related to the field, as well as reflecting on the concepts associated with the subject matter, with the aim of obtaining a method capable of parameterizing these helicoids from any two skew lines. The study was divided into two phases, with the first phase being responsible for verifying the mean curvature of the helicoid and the second phase focused on obtaining a method capable of parameterizing them. To achieve this, we introduced in the first moment, the definition of a ruled surface and the necessary concepts and propositions to verify that the helicoid is a minimal surface. It is worth noting that these concepts can easily be found in introductory materials on Differential Geometry, with the innovation of this work lying in the method obtained in the second phase. Furthermore, we presented a chapter on the applications of helicoids in architecture, exemplifying their aesthetic and structural potential in both this field and civil construction.

**Keywords:** Minimum surfaces. Minimum helicoid. Skew lines.

## 1 INTRODUÇÃO

Um problema clássico da geometria cartesiana é determinar uma curva ou superfície contendo um determinado conjunto de pontos. Por exemplo, na Geometria Euclidiana clássica sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta (BARBOSA, 1994), e que três pontos não colineares determinam um plano (CARVALHO, 2005).

Outros resultados clássicos que podemos destacar são que são necessários três pontos não colineares para definir uma circunferência, isto é, a circunferência circunscrita ao triângulo cujos vértices são os três pontos (BARBOSA, 1994) e que são necessários quatro pontos não coplanares para determinar uma esfera (FRENSEL; DELGADO, 2008).

De forma similar, mas pouco conhecida, dados três pontos distintos, existe uma família de hélices passando pelos três. Ademais, a determinação de uma única hélice torna-se possível dependendo da posição de quatro pontos não coincidentes entre si (GORIELY; NEUKIRCH; HAUSRATH, 2012).

Quando se consideram os helicoides, ou seja, superfícies em que para cada ponto, existe uma hélice contida e que passa por ele, pode-se encontrar na literatura clássica vários livros que tratam de suas parametrizações, como o livro de Geometria diferencial do Manfredo e o do Paulo Ventura Araújo. Em particular, essas obras tratam dos helicoides regrados com eixos paralelos aos eixos coordenados, o que se apresentará nas preliminares para o conforto do leitor.

Neste trabalho, trataremos dos helicoides mínimos, cuja projeção em um plano perpendicular ao eixo do helicoide não forma um círculo. Denomina-se esse tipo específico de helicoide como "uma volta" e os investigaremos sob uma perspectiva, para nós, até então desconhecida na literatura, com o objetivo de responder à seguinte questão: "Dado um par de retas reversas quaisquer no espaço euclidiano tridimensional, qual é o helicoide de uma única volta que passa por essas duas retas?".

A parametrização de tais helicoides, juntamente com a resposta para essa pergunta será explorada nas seções 3.1 e 3.2 a seguir.

## 2 PRELIMINARES

### 2.1 Parametrização do helicoide

De maneira geral, pode-se dizer que uma superfície regrada é uma superfície gerada por uma reta movendo-se ao longo de uma curva  $\alpha$  denominada por curva diretriz, definida por uma aplicação  $X : I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ , apresentada como:

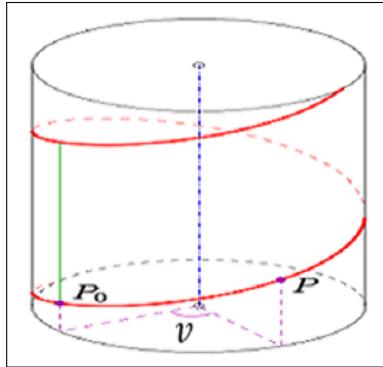
$$X(v, u) = \alpha(v) + u \cdot \omega(v), \quad (1)$$

em que  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\omega : J \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  são aplicações diferenciáveis.

É crucial apresentar essa definição, pois o helicoide é uma forma particular de superfície regrada, que pode ser expressa através da equação (1) com  $\alpha(v)$  sendo a curva diretriz e  $\omega(v)$  a curva geratriz. Para determinar tais curvas, determinou-se primeiro a parametrização de uma

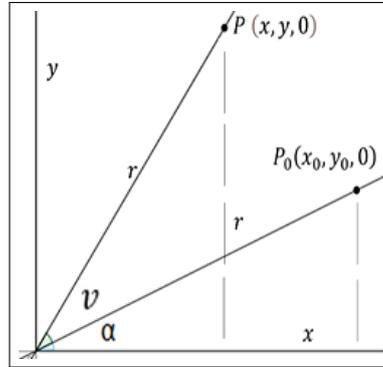
hélice circular, utilizando-se um ponto  $P$  com coordenadas  $(x, y, z)$  na base canônica do  $\mathbb{R}^3$ , o qual percorre uma trajetória ao longo da Figura 1, que tem sua projeção no plano  $z = 0$ , como mostra a Figura 2.

**Figura 1 – Hélice circular**



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

**Figura 2 – Projeção de  $P$**



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Assumindo o raio da hélice circular como  $r$  encontrou-se as equações abaixo:

$$x = r \cdot \cos(\alpha + v) \quad y = r \cdot \sin(\alpha + v); \quad (2)$$

$$x_0 = r \cdot \cos(\alpha) \quad y_0 = r \cdot \sin(\alpha). \quad (3)$$

Ao desenvolver as equações nomeadas como (2) e fazendo as substituições necessárias utilizando (3), conseguiremos deduzir as parametrizações que vão ser utilizadas na abscissa e ordenada da hélice, as quais serão dadas por:

$$x = x_0 \cdot \cos(v) - y_0 \cdot \sin(v); \quad (4)$$

$$y = y_0 \cdot \cos(v) + x_0 \cdot \sin(v). \quad (5)$$

De posse das equações (4) e (5) e utilizando  $z = z_0 + j \cdot v$  como a parametrização para a cota da hélice, obtém-se a aplicação diferenciável que descreve a curva mostrada na Figura 1, a qual é apresentada abaixo pela equação (6).

$$\beta(v) = (x_0 \cdot \cos(v) - y_0 \cdot \sin(v), y_0 \cdot \cos(v) + x_0 \cdot \sin(v), z_0 + j \cdot v), \text{ com } j, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Uma vez definida a parametrização  $\beta(v)$ , ao acrescentarmos mais um parâmetro, podemos estender essa curva para uma superfície, a qual é conhecida como helicoide. Além disso, já que a superfície em questão se encaixa na definição de superfície regrada, a mesma pode ser escrita no formato da equação (1), resultando em:

$$X(v, u) = (0, 0, z_0 + j \cdot v) + u \cdot (x_0 \cdot \cos(v) - y_0 \cdot \sin(v), y_0 \cdot \cos(v) + x_0 \cdot \sin(v), 0) \quad (7)$$

em que  $j, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq u \leq r$ .

## 2.2 Determinação da curvatura média do helicóide

**Definição 2.2.1.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que:

- 1 -  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ ;
- 2 -  $X$  é um homeomorfismo. Isto é,  $X$  é uma aplicação bijetiva que tem inversa contínua;
- 3 -  $\forall q \in U$  a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

A aplicação  $X$  é chamada de parametrização local.

Vale ressaltar que essa definição permite que se trabalhe com superfícies sem auto-interseções por conta do homeomorfismo e que a condição 1 assegura que a aplicação  $X$  pode ser derivada, quantas vezes for necessário.

Além disso, em especial a condição 3 garante que as superfícies regulares admitam planos tangentes bem definidos em todos os pontos da sua superfície, o que é essencial para que se possa definir os coeficientes da 1ª e 2ª forma fundamental, sendo o helicóide obtido em (7) uma superfície que satisfaz essa definição, cuja verificação não será apresentada por não se enquadrar no escopo deste trabalho.

**Definição 2.2.2.** Seja  $X(v, u)$  uma parametrização local de uma superfície regular  $S$  e  $X_u$  e  $X_v$  as bases do plano tangente a um ponto  $p \in S$ , denominado de  $T_p S$ . Defini-se como primeira forma quadrática a aplicação  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $I_p(w) = \langle w, w \rangle$  e os coeficientes da 1ª forma fundamental deste plano são denotados por  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$ ,  $G = \langle X_v, X_v \rangle$ .

**Definição 2.2.3.** O vetor normal unitário da superfície  $S$  é definido como:

$$N = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{|\vec{X}_u \times \vec{X}_v|} \quad (8)$$

**Observação.** Note que em uma superfície regular  $dX_q$  ser injetiva para todo  $q$  é equivalente a dizer que  $|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0$  para todo  $q$  e isso garante que o vetor normal unitário  $N$  esteja bem definido para todo ponto  $p \in S$ .

**Definição 2.2.4.** Seja  $\vec{w} = \lambda \cdot X_u + \mu \cdot X_v \in T_p S$  e  $dN_p(\vec{w})$  a transformação linear que nós dá a taxa de variação do vetor normal a  $\vec{w} \in T_p S$ , descrita por  $dN_p(\vec{w}) = \lambda \cdot N_u + \mu \cdot N_v$ , com  $dN_p(X_u) = N_u$  e  $dN_p(X_v) = N_v$ , temos que a expressão da 2ª forma fundamental é dada por:

$$II_p(\vec{w}) = -\langle dN_p(\vec{w}), \vec{w} \rangle \quad (9)$$

Desenvolvendo a equação (9) obtém-se:

$$\begin{aligned} II_p(\vec{w}) &= -\langle (\lambda \cdot \mathbf{N}_u + \mu \cdot \mathbf{N}_v), (\lambda \cdot \mathbf{X}_u + \mu \cdot \mathbf{X}_v) \rangle \\ &= -[\lambda^2 \cdot \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{X}_u \rangle + 2 \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{X}_v \rangle + \mu^2 \cdot \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{X}_v \rangle]. \end{aligned} \quad (10)$$

Para simplificar os cálculos, vale ressaltar que:

$$\langle N_u, X_u \rangle = -\langle N, X_{uu} \rangle; \langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle; \langle N_v, X_v \rangle = -\langle N, X_{vv} \rangle \quad (11)$$

Como consequência, se for definido  $\langle N_u, X_u \rangle = -e$ ;  $\langle N_u, X_v \rangle = -f$ ;  $\langle N_v, X_v \rangle = -g$ , então a equação (10) poderá ser reescrita como:

$$II_p(\vec{w}) = e \cdot \lambda^2 + 2f \cdot \lambda \cdot \mu + g \cdot \mu^2$$

nesse contexto, os termos  $e$ ,  $f$ ,  $g$  são geralmente conhecidos como *coeficientes da 2ª forma fundamental*.

A fim de simplificar a notação, utilizou-se  $e(p) = e$ ,  $f(p) = f$ ,  $g(p) = g$ , em que  $p$  pertence a superfície  $S$ , parametrizada localmente por  $X : I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Tal que  $U = I \times J$  e  $X(q) = p$ .

**Definição 2.2.5.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$  uma parametrização local de uma superfície regular  $S$  e  $p \in S$ . A função curvatura normal em  $p$  é uma aplicação  $k_n : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  que para cada vetor  $w \in T_p S$  não nulo associa:*

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}$$

Definição está que em outras palavras nos retorna uma medida para o quanto a superfície  $S$  acaba desviando do plano tangente  $T_p S$  a medida que se avança na direção  $w$ .

A partir dessa ideia, para uma parametrização local  $X$  de uma superfície regular, obtemos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em (Tenenblat, 2008), das páginas 161 à 162.

**Proposição 2.2.1.** *Se  $X$  é uma parametrização local de uma superfície regular  $S$  e  $k_n$  é a função curvatura normal de  $S$  em  $p$ , então existem vetores unitários e ortogonais  $w_1$  e  $w_2 \in T_p S$  tais que  $k_1 = k_n(w_1)$  e  $k_2 = k_n(w_2)$  correspondem, respectivamente, aos valores mínimos e máximos da função  $k_n$  e esses valores são chamados de curvaturas principais da superfície  $S$ .*

**Definição 2.2.6.** *Sejam  $k_1$  e  $k_2$  as curvaturas principais de uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em um ponto  $p \in S$ . A semi-soma de  $k_1$  e  $k_2$  é chamada de curvatura média de  $S$  em  $p$  e é denotada por:*

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

**Observação.** *A demonstração da próxima proposição pode ser encontrada em (Carmo, 2005), das páginas 181 à 184.*

Para o conforto do leitor, abaixo segue seu enunciado.

**Proposição 2.2.2.** *A curvatura média de uma superfície regular  $S$  em um ponto  $p$  pode ser expressa pelos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, resultando na seguinte equação:*

$$H(p) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{E \cdot g - 2 \cdot F \cdot f + G \cdot e}{E \cdot G - F^2} \right).$$

**Definição 2.2.7.** *Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é mínima se a sua curvatura média é identicamente nula para todos os pontos  $p \in S \subset \mathbb{R}^3$ .*

Vamos mostrar que o helicoide parametrizado em (7) é mínimo.

Calculando os coeficientes da 1ª forma fundamental pela definição (2.2.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} X_u &= (x_0 \cdot \cos(v) - y_0 \cdot \sin(v), y_0 \cdot \cos(v) + x_0 \cdot \sin(v), 0); \\ X_v &= (u \cdot (-x_0 \cdot \sin(v) - y_0 \cdot \cos(v)), u \cdot (-y_0 \cdot \sin(v) + x_0 \cdot \cos(v)), j); \\ E &= \langle X_u, X_u \rangle = x_0^2 + y_0^2; \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0; \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = u^2 \cdot (x_0^2 + y_0^2) + j^2. \end{aligned}$$

Calculando o vetor normal a superfície  $S$ , pela definição 2.2.3 e  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$ ,  $X_{vv}$ , consegue-se que:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0, 0, 0); \\ X_{uv} &= (-x_0 \cdot \sin(v) - y_0 \cdot \cos(v), -y_0 \cdot \sin(v) + x_0 \cdot \cos(v), 0); \\ X_{vv} &= (u \cdot (-x_0 \cdot \cos(v) + y_0 \cdot \sin(v)), u \cdot (-y_0 \cdot \cos(v) - x_0 \cdot \sin(v)), 0); \\ N &= \left( \frac{j \cdot (y_0 \cdot \cos(v) + x_0 \cdot \sin(v))}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2) \cdot (u^2 + j^2)}}, \frac{-j \cdot (x_0 \cdot \cos(v) - y_0 \cdot \sin(v))}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2) \cdot (u^2 + j^2)}}, \frac{u \cdot (x_0^2 + y_0^2)}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2) \cdot (u^2 + j^2)}} \right). \end{aligned}$$

Utilizando os resultados obtidos acima e das equações em (11), determina-se que os coeficientes da 2ª forma fundamental são:

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = 0 \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = -j \cdot \sqrt{\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{(u^2 + j^2)}} \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes da 1ª forma fundamental e os da 2ª forma fundamental, na proposição (2.2.2), obtém-se que:

$$H(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_0^2 + y_0^2) \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot (-j \cdot (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} \cdot (u^2 + j^2)^{-1/2} + 0 \cdot (u \cdot (x_0^2 + y_0^2) + j^2)}{(x_0^2 + y_0^2) \cdot (u^2(x_0^2 + y_0^2) + j^2) - 0^2}$$

Resultando em  $H(p) = 0$ , o que prova pela definição (2.2.7) que o helicoide é uma superfície mínima.

### 3 CONSTRUÇÃO DO HELICOIDE QUE PASSA ENTRE DUAS RETAS REVERSAS

#### 3.1 Helicoide que passa entre retas reversas - Caso particular

Nesta subsecção, se determinará o helicoide mínimo que passa entre retas contidas em planos paralelos ao plano  $XY$ . Porém, antes de enunciar a proposição, é necessário que o leitor relembre o que são retas reversas.

**Definição 3.1.1.** *Sejam  $X_0$  e  $X_1$  retas distintas no espaço. Dizemos que  $X_0$  e  $X_1$  são retas reversas se:*

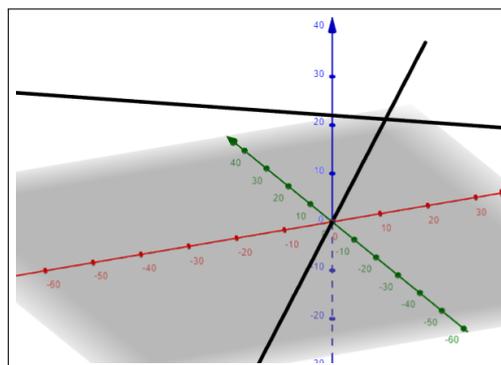
- 1 - Não são paralelas (Seus vetores diretores não são colineares);
- 2 - Não possuem pontos em comum (Não são concorrentes).

Normalmente, quando se define retas reversas, se exige que não exista um plano que as contenha simultaneamente, isso é, que elas não sejam coplanares. No entanto, isso decorre imediatamente das duas condições estabelecidas na definição de retas reversas apresentada e, por essa razão, essa condição não foi explicitada.

A situação descrita acima é exemplificada pela Figura (3) abaixo, em que se consegue visualizar as retas reversas  $X_0$  e  $X_1$  que passam por pontos diferentes e cujos vetores diretores não são múltiplos entre si.

$$X_0 = (0, 0, 0) + t_0 \cdot (a, b, 0) \quad \text{e} \quad X_1 = (0, 0, D) + t_1 \cdot (c, d, 0) \quad (12)$$

**Figura 3 – Retas reversas**



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Sejam  $v_0$  e  $v_1$  os vetores diretores, respectivamente, das retas apresentadas em (12) e  $z$  o versor  $\hat{k}$ . Tem-se então que:

$$v_0 = (a, b, 0), \quad v_1 = (c, d, 0) \quad \text{e} \quad z = (0, 0, 1)$$

Além disso, denotando-se como  $D$  a distância entre as retas reversas a serem analisadas, pode-se destacar a seguinte proposição:

**Proposição 3.1.1.** *Com a notação determinada acima teremos:*

**Caso 1:** Se  $\det(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$ , então o helicóide contido entre  $X_0$  e  $X_1$

possui uma parametrização que pode ser descrita pela seguinte equação:

$$X(v, u) = (0, 0, z_0 + j \cdot v) + u \cdot (x_0 \cdot \cos(v) - y_0 \cdot \sin(v), y_0 \cdot \cos(v) + x_0 \cdot \sin(v), 0)$$

Em que:

$$\begin{aligned} x_0 &= a; & y_0 &= b; & z_0 &= 0; \\ j &= \frac{D}{\arccos\left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|}\right)}; \\ 0 &\leq v \leq \arccos\left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|}\right). \end{aligned}$$

**Caso 2:** Se  $\det(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} < 0$ , então o helicóide contido entre  $X_0$  e  $X_1$

possui uma parametrização que pode ser descrita pela seguinte equação:

$$X(v, u) = (0, 0, z_0 + j \cdot v) + u \cdot (x_0 \cdot \cos(v) - y_0 \cdot \sin(v), y_0 \cdot \cos(v) + x_0 \cdot \sin(v), 0)$$

Em que:

$$\begin{aligned} x_0 &= a; & y_0 &= b; & z_0 &= 0; \\ j &= \frac{-D}{\arccos\left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|}\right)}; \\ -\arccos\left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|}\right) &\leq v \leq 0. \end{aligned}$$

*Demonstração.*

**Caso 1:** Para determinar o helicóide delimitado pelas retas  $X_0$  e  $X_1$ , primeiro precisa-se da condição  $\det(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{z}) > 0$ , a qual é imposta, para orientar a direção da superfície.

Para visualizar isso, deve-se lembrar que o produto misto de  $v_0, v_1, z$ , pode ser escrito como:

$$(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{z} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Notar que o vetor resultante da operação  $v_0 \times v_1$  terá a mesma direção do eixo  $z$ , pois  $v_0$  e  $v_1$  estão no plano  $xy$ . Além disso, quando se impõe a condição  $\det(v_0, v_1, z) > 0$ , exige-se que o produto misto de  $v_0, v_1, z$  seja positivo e isso é o mesmo que dizer que  $v_0 \times v_1$  tem o mesmo sentido que  $z$ . Isso implica que o giro do helicoide ocorrerá no sentido anti-horário no plano  $xy$ .

Nesse caso, o helicoide partirá da reta  $X_0$  quando o parâmetro  $v$  for mínimo, ou seja,  $v = \min$  e chegará na reta  $X_1$  quando  $v$  for máximo, ou seja,  $v = \max$ .

Ao fazer a projeção das retas  $X_0$  com vetor diretor  $v_0$  e  $X_1$  com vetor diretor  $v_1$  no plano  $z = 0$ , se conseguirá determinar o ângulo entre elas através da expressão:

$$\arccos \left( \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|} \right)$$

Para o helicoide ficar determinado entre essas retas reversas, sabe-se que o parâmetro  $v$  dele deve ficar limitado de acordo com a inequação abaixo:

$$0 \leq v \leq \arccos \left( \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|} \right).$$

Além disso, a substituição  $x_0 = a$  e  $y_0 = b$  deve ocorrer na equação (7), porque o intuito é que o helicoide comece na reta  $X_0$  quando  $v_{\min} = 0$ .

Ademais, o eixo  $z$  da equação (7) que é  $z = z_0 + j \cdot v$ , terá  $z_0 = 0$  devido à restrição imposta pela cota de  $X_0$ . Nesse cenário,  $j$  é dado por:

$$j = \frac{D}{\arccos \left( \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|} \right)}.$$

Essa escolha garante que, para  $v$  máximo, a cota do helicoide seja  $D$  e, para  $v$  mínimo, seja  $0$ .

**Caso 2:** Nesse caso utiliza-se a possibilidade do determinante ser menor que zero, ou seja,  $\det(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, z) < 0$  com o intuito de fazer o helicoide partir da reta  $X_1$  quando  $v = \min$  e chegar em  $X_0$  quando  $v = \max$ .

De forma análoga ao exposto no caso 1, essa condição é equivalente a afirmar que o vetor resultante da operação  $v_0 \times v_1$  apresenta a mesma direção de  $z$ , mas sentido oposto, pois exigir  $\det(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, z) < 0$  é o mesmo que dizer que o produto misto de  $v_0, v_1$  e  $z$  é negativo. Isso implica que o giro do helicoide ocorrerá no sentido horário no plano  $xy$ .

É importante ressaltar que o ângulo entre  $X_0$  e  $X_1$  continua igual ao determinado no caso 1.

Para que o helicoide chegue em  $X_0$  quando  $v = \max$ , o parâmetro  $v$  deverá ficar limitado por:

$$-\arccos \left( \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|} \right) \leq v \leq 0.$$

Em que  $j$  da equação  $z = z_0 + j \cdot v$ , passa a ser dado pela equação abaixo:

$$j = \frac{-D}{\arccos\left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|}\right)}$$

Dessa forma, se fizer a substituição  $x_0 = a$  e  $y_0 = b$  na equação (7) quando  $v = \max$ , ou seja,  $v = 0$  teremos:

$$X(v, u) = \left(0, 0, 0 + \frac{-D}{\arccos\left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|}\right)} \cdot 0\right) + u \cdot (a \cdot \cos 0 - b \cdot \sin 0, b \cdot \cos 0 + a \cdot \sin 0, 0)$$

Que é análogo a afirmar  $X(v, u) = X_0$ , se  $v = 0$ . □

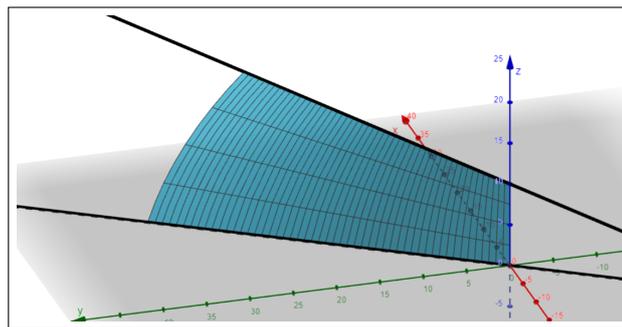
**Exemplo 1:** Seja  $X_0 = (0, 0, 0) + t \cdot (9, 14, 0)$  e  $X_1 = (0, 0, 10) + t \cdot (15, 8, 0)$  ao aplicar-se a proposição (3.1.1) irá recair no caso 2, pois  $\det(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 15 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -138$ .

Determinando a parametrização do helicoide que passa entre essas retas reversas, obtem-se que  $\arccos\left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \cdot \|\mathbf{v}_1\|}\right) = 0.162 \cdot \pi$ ,  $D = 10$  e  $j = -19.648$ , resultando no helicoide dado por:

$$X(v, u) = (0, 0, -19.648 \cdot v) + u \cdot (9 \cdot \cos v - 14 \cdot \sin v, 14 \cdot \cos v + 9 \cdot \sin v, 0) \text{ com } -0.162 \cdot \pi \leq v \leq 0$$

A Figura 4 abaixo ilustra esse exemplo, com o helicoide girando no sentido horário.

**Figura 4 – Helicoide entre duas retas reversas**



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

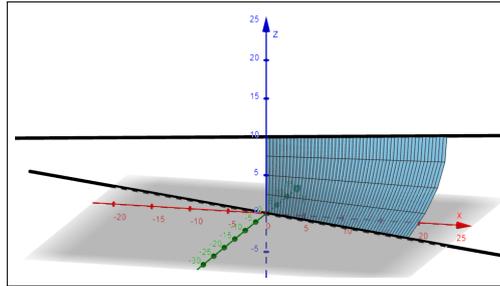
**Exemplo 2:** Seja  $X_0 = (0, 0, 0) + t \cdot (7, -3, 0)$  e  $X_1 = (0, 0, 10) + t \cdot (20, 6, 0)$ , ao aplicarmos a proposição (3.1.1) iremos recair no caso 1, pois  $\det(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 20 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 102$ .

Determinando a parametrização do helicoide que passa entre essas retas reversas obtém-se que  $\arccos\left(\frac{\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_1}{|\mathbf{V}_0| |\mathbf{V}_1|}\right) = 0.221 \cdot \pi$ ,  $D = 10$  e  $j = 14.36$ , resultando no helicoide determinado por:

$$X(u, v) = (0, 0, 14.36 \cdot v) + u \cdot (7 \cdot \cos(v) + 3 \cdot \sin(v), -3 \cdot \cos(v) + 7 \cdot \sin(v), 0), \text{ com } 0 \leq v \leq 0.221 \cdot \pi$$

A Figura 5 abaixo ilustra esse exemplo, com o helicoide girando no sentido anti-horário.

**Figura 5 – Helicoide entre duas retas reversas**



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

### 3.2 Helicoide que passa entre retas reversas - Caso geral

Sejam as retas reversas  $X_0$  e  $X_1$  denotadas por:

$$X_0 = (x_0, y_0, z_0) + t_0 \cdot (a, b, c) \quad \text{e} \quad X_1 = (x_1, y_1, z_1) + t_1 \cdot (d, e, f) \quad (13)$$

Pode-se enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 3.2.1.** *Dadas as retas reversas  $X_0$  e  $X_1$  com parametrização dada por (13), o helicoide que passa por estas retas será dado pelo caso 1 ou pelo caso 2.*

**Caso 1:** *Se  $b' > 0$ , então o helicoide que passa por  $X_0$  e  $X_1$  é:*

$$X(u, v) = (-j \cdot K \cdot v - n \cdot r_{0(v)} + r_{1(u,v)}, -j \cdot L \cdot v - o \cdot r_{0(v)} + r_{2(u,v)}, -j \cdot M \cdot v - p \cdot r_{0(v)} + r_{3(u,v)})$$

com:

$$0 \leq u \leq w, \quad w \in \mathbb{R}$$

$$-\arccos\left(\frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}\right) \leq v \leq 0.$$

**Caso 2:** Se  $b' < 0$ , então o helicóide que passa por  $X_0$  e  $X_1$  é:

$$X(u, v) = (j \cdot K \cdot v + n \cdot r_{0(v)} + r_{1(u,v)}, j \cdot L \cdot v + o \cdot r_{0(v)} + r_{2(u,v)}, j \cdot M \cdot v + p \cdot r_{0(v)} + r_{3(u,v)})$$

com:

$$0 \leq u \leq w, w \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq v \leq \arccos \left( \frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \right).$$

Em ambos os casos:

$$r_{0(v)} = \frac{y'_1 \cdot v}{\arccos \left( \frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \right)};$$

$$r_{1(u,v)} = A \cdot S_{1(u,v)} + n \cdot S_{2(u,v)} + x_0;$$

$$r_{2(u,v)} = B \cdot S_{1(u,v)} + o \cdot S_{2(u,v)} + y_0;$$

$$r_{3(u,v)} = C \cdot S_{1(u,v)} + p \cdot S_{2(u,v)} + z_0;$$

$$S_{1(u,v)} = a' \cdot u \cdot \cos v - b' \cdot u \cdot \sin v;$$

$$S_{2(u,v)} = b' \cdot u \cdot \cos v + a' \cdot u \cdot \sin v;$$

$$j = \frac{z'_1}{\arccos \left( \frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \right)};$$

$$a' = A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c;$$

$$b' = n \cdot a + o \cdot b + p \cdot c;$$

$$y'_1 = n \cdot (x_1 - x_0) + o \cdot (y_1 - y_0) + p \cdot (z_1 - z_0);$$

$$z'_1 = K \cdot (x_1 - x_0) + L \cdot (y_1 - y_0) + M \cdot (z_1 - z_0);$$

$$n = B \cdot M - C \cdot L;$$

$$o = C \cdot K - A \cdot M;$$

$$p = A \cdot L - B \cdot K;$$

$$A = d \cdot (d^2 + e^2 + f^2)^{-1/2};$$

$$B = e \cdot (d^2 + e^2 + f^2)^{-1/2};$$

$$C = f \cdot (d^2 + e^2 + f^2)^{-1/2};$$

$$K = k \cdot (k^2 + l^2 + m^2)^{-1/2};$$

$$L = l \cdot (k^2 + l^2 + m^2)^{-1/2};$$

$$M = m \cdot (k^2 + l^2 + m^2)^{-1/2};$$

$$k = b \cdot f - c \cdot e;$$

$$l = c \cdot d - a \cdot f;$$

$$m = a \cdot e - b \cdot d.$$

*Demonstração.*

Seja  $v_0 = (a, b, c)$  e  $v_1 = (d, e, f)$  os vetores diretores de  $X_0$  e  $X_1$  de (13) em um sistema de coordenadas  $OXYZ$ , então pode-se efetuar a translação desse sistema para um sistema  $O'X'Y'Z'$ , em que as novas coordenadas de  $X_0$  e  $X_1$  serão:

$$X'_0 = (0, 0, 0) + t_0 \cdot (a, b, c), \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

$$X'_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) + t_1 \cdot (d, e, f), \quad t_1 \in \mathbb{R}$$

A ideia para conseguir resolver o problema acima, é escolher uma base ortonormal, ou seja, uma base formada por vetores unitários e ortogonais dois a dois entre si de tal forma que seja possível aplicar a proposição (3.1.1) em  $X'_0$  e  $X'_1$  dentro dessa base.

Seja  $\beta = \{e_1, e_2, e_3\} \mid \mathbb{R}^3 = \text{span}\{\beta\}$  e um vetor qualquer de  $O'X'Y'Z'$  dado por  $(x', y', z')$ . Se ao representar esse mesmo vetor como  $(x'', y'', z'')$  na base  $\beta$ , então tem-se:

$$(x', y', z') = x'' \cdot e_1 + y'' \cdot e_2 + z'' \cdot e_3$$

Se for tomado  $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ , então o vetor diretor normalizado de  $X'_1$  na base  $\beta$  será:

$$\frac{(d, e, f)}{\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

Para simplificar os cálculos posteriormente, se irá denotar:

$$e_1 = (A, B, C)$$

Em que:

$$A = \frac{d}{\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}};$$

$$B = \frac{e}{\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}};$$

$$C = \frac{f}{\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}}.$$

Definindo  $e_3 = \frac{v_0 \times v_1}{|v_0 \times v_1|}$ , se conseguirá garantir que os vetores diretores de  $X'_0$  e  $X'_1$ , terão necessariamente cota nula na base  $\beta$ , já que  $e_3$  é perpendicular a  $v_0$  e  $v_1$ . Com isso se terá:

$$e_3 = (K, L, M)$$

Em que:

$$\begin{aligned} K &= k \cdot (k^2 + l^2 + m^2)^{-1/2}; \\ L &= l \cdot (k^2 + l^2 + m^2)^{-1/2}; \\ M &= m \cdot (k^2 + l^2 + m^2)^{-1/2}; \\ k &= b \cdot f - c \cdot e; \\ l &= c \cdot d - a \cdot f; \\ m &= a \cdot e - b \cdot d. \end{aligned}$$

Uma vez já tendo definido quem será o  $e_3$ , basta denotar  $e_2 = e_1 \times e_3$ , o que resulta em:

$$e_2 = (n, o, p)$$

Em que:

$$\begin{aligned} n &= B \cdot M - C \cdot L; \\ o &= C \cdot K - A \cdot M; \\ p &= A \cdot L - B \cdot K. \end{aligned}$$

Com a base  $\beta$  criada, existe uma transformação linear que troca as coordenadas dos vetores da base canônica para a base  $\beta$ , que é denotada por:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (14)$$

A matriz mudança de base que aparece em (14) é ortogonal pela forma como a base  $\beta$  foi construída, portanto pode-se concluir que:

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A & B & C \\ n & o & p \\ K & L & M \end{bmatrix}$$

Se denotar  $X'_0$  e  $X'_1$  do sistema de coordenadas  $O'X'Y'Z'$  na base  $\beta$  como  $X''_0$  e  $X''_1$ , através da equação (14), e algumas substituições, se conseguirá que:

$$X''_0 = (0, 0, 0) + t_0 \cdot (a', b', 0), t_0 \in \mathbb{R} \quad e \quad X''_1 = (x'_1, y'_1, z'_1) + t_{11} \cdot (1, 0, 0), t_{11} \in \mathbb{R}$$

Em que:

$$a' = A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c;$$

$$b' = n \cdot a + o \cdot b + p \cdot c;$$

$$x'_1 = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)$$

$$y'_1 = n \cdot (x_1 - x_0) + o \cdot (y_1 - y_0) + p \cdot (z_1 - z_0);$$

$$z'_1 = K \cdot (x_1 - x_0) + L \cdot (y_1 - y_0) + M \cdot (z_1 - z_0).$$

A seguir, serão deduzidas essas relações, justificando a forma como foram obtidas.

Notar que, aplicando a equação (14), na reta  $X'_0$ , se obterá que:

$$X''_0 = \begin{bmatrix} A \cdot t_0 \cdot a + B \cdot t_0 \cdot b + C \cdot t_0 \cdot c \\ n \cdot t_0 \cdot a + o \cdot t_0 \cdot b + p \cdot t_0 \cdot c \\ K \cdot t_0 \cdot a + L \cdot t_0 \cdot b + M \cdot t_0 \cdot c \end{bmatrix} = t_0 \cdot \begin{bmatrix} A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c \\ n \cdot a + o \cdot b + p \cdot c \\ K \cdot a + L \cdot b + M \cdot c \end{bmatrix}$$

Nesse cenário, pode-se verificar que  $K \cdot a + L \cdot b + M \cdot c = 0$  tanto por meio do desenvolvimento algébrico quanto pela forma como a base  $\beta$  foi construída.

De maneira análoga, aplicando a equação (14), na reta  $X'_1$ , obtém-se que:

$$X''_1 = \begin{bmatrix} A \cdot (x_1 - x_0) + A \cdot t_1 \cdot d + B \cdot (y_1 - y_0) + B \cdot t_1 \cdot e + C \cdot (z_1 - z_0) + C \cdot t_1 \cdot f \\ n \cdot (x_1 - x_0) + n \cdot t_1 \cdot d + o \cdot (y_1 - y_0) + o \cdot t_1 \cdot e + p \cdot (z_1 - z_0) + p \cdot t_1 \cdot f \\ K \cdot (x_1 - x_0) + K \cdot t_1 \cdot d + L \cdot (y_1 - y_0) + L \cdot t_1 \cdot e + M \cdot (z_1 - z_0) + M \cdot t_1 \cdot f \end{bmatrix}$$

Que é equivalente a:

$$X''_1 = \begin{bmatrix} A \cdot (x_1 - x_0) + B \cdot (y_1 - y_0) + C \cdot (z_1 - z_0) \\ n \cdot (x_1 - x_0) + o \cdot (y_1 - y_0) + p \cdot (z_1 - z_0) \\ K \cdot (x_1 - x_0) + L \cdot (y_1 - y_0) + M \cdot (z_1 - z_0) \end{bmatrix} + t_1 \cdot \begin{bmatrix} A \cdot d + B \cdot e + C \cdot f \\ n \cdot d + o \cdot e + p \cdot f \\ K \cdot d + L \cdot e + M \cdot f \end{bmatrix}$$

Perceba que, se reescrever  $(n \cdot d + o \cdot e + p \cdot f)$  e  $(K \cdot d + L \cdot e + M \cdot f)$  em função de  $k, l, m, d, e, f$  se verificará que:

$$n \cdot d + o \cdot e + p \cdot f = 0$$

$$K \cdot d + L \cdot e + M \cdot f = 0$$

Além disso, é importante notar que o valor de  $x'_1$  é irrelevante, pois se pode pegar um ponto mais conveniente em cima da reta  $X''_1$ , representado por  $(0, y'_1, z'_1)$ , resultando em:

$$X''_1 = (0, y'_1, z'_1) + t_{12} \cdot (1, 0, 0)$$

com:

$$t_1 = \frac{t_{12} - x'_1}{A \cdot d + B \cdot e + C \cdot f}$$

Adicionalmente, é importante destacar que se tomar uma reta  $X_2''$  paralela à reta  $X_1''$  de tal forma que ela passe pelo ponto  $(0, 0, z'_1)$ , se poderá aplicar a proposição (3.1.1), determinando o helicoide que passa entre  $X_0''$  e  $X_2''$  na base  $\beta$  resultando em:

**Caso 1:** Se  $b' > 0$ , então o helicoide que passa por  $X_0''$  e  $X_2''$  é:

$$X(v, u) = (0, 0, j \cdot v) + u \cdot (a' \cdot \cos(v) - b' \cdot \sin(v), b' \cdot \cos(v) + a' \cdot \sin(v), 0)$$

em que:

$$-j = \frac{z'_1}{\arccos\left(\frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}\right)};$$

$$0 \leq u \leq w, \quad w \in \mathbb{R};$$

$$-\arccos\left(\frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}\right) \leq v \leq 0.$$

**Caso 2:** Se  $b' < 0$ , então o helicoide que passa por  $X_0''$  e  $X_2''$  é:

$$X(v, u) = (0, 0, j \cdot v) + u \cdot (a' \cdot \cos(v) - b' \cdot \sin(v), b' \cdot \cos(v) + a' \cdot \sin(v), 0)$$

em que:

$$j = \frac{z'_1}{\arccos\left(\frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}\right)};$$

$$0 \leq u \leq w, \quad w \in \mathbb{R};$$

$$0 \leq v \leq \arccos\left(\frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}\right).$$

Como a intenção é determinar o helicoide entre  $X_0''$  e  $X_1''$ , é necessário transladar o helicoide  $X(v, u)$  nos dois casos de modo que ele fique alinhado com a reta  $X_1''$ . Para isso, a translação a ser feita no caso 1 é dada por:

$$(0, v \cdot y'_1 \cdot \gamma^{-1}, 0)$$

Já a translação no caso 2 é dada por:

$$(0, -v \cdot y'_1 \cdot \gamma^{-1}, 0)$$

A diferença das translações se dá pelos diferentes intervalos ao qual o parâmetro  $v$  foi limitado, resultando em:

**Caso 1:** Se  $b' > 0$ , então o helicoide que passa por  $X''_0$  e  $X''_1$  é:

$$X(v, u) = (0, -v \cdot y'_1 \cdot \gamma^{-1}, j \cdot v) + u \cdot (a' \cdot \cos(v) - b' \cdot \sin(v), b' \cdot \cos(v) + a' \cdot \sin(v), 0)$$

**Caso 2:** Se  $b' < 0$ , então o helicoide que passa por  $X''_0$  e  $X''_1$  é:

$$X(v, u) = (0, v \cdot y'_1 \cdot \gamma^{-1}, j \cdot v) + u \cdot (a' \cdot \cos(v) - b' \cdot \sin(v), b' \cdot \cos(v) + a' \cdot \sin(v), 0)$$

Em que:

$$\gamma = \arccos \left( \frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \right).$$

Cenário no qual, tanto no caso 1 como no caso 2, já se foi definida a variação dos parâmetros  $u$  e  $v$ , e  $a'$  e  $b'$  já foram citados.

Tendo a parametrização do helicoide em  $\beta$ , passamos a ser capazes de determinar o helicoide que passa entre  $X_0$  e  $X_1$ . Para tal, basta utilizar a transformação linear que parte da base  $\beta$  e vai para a base canônica do  $R^3$  transladada. Essa transformação linear é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \quad (15)$$

Utilizando (15), e removendo em seguida a translação para o sistema de coordenadas  $O'X'Y'Z'$  feita no começo da demonstração, se obterá que o helicoide entre  $X_0$  e  $X_1$  ficará determinado por 2 casos, que são dados por:

**Caso 1:** Se  $b' > 0$ , então o helicoide que passa por  $X_0$  e  $X_1$  é:

$$X(u, v) = (-j \cdot K \cdot v - n \cdot r_{0(v)} + r_{1(u,v)}, -j \cdot L \cdot v - o \cdot r_{0(v)} + r_{2(u,v)}, -j \cdot M \cdot v - p \cdot r_{0(v)} + r_{3(u,v)})$$

**Caso 2:** Se  $b' < 0$ , então o helicoide que passa por  $X_0$  e  $X_1$  é:

$$X(u, v) = (j \cdot K \cdot v + n \cdot r_{0(v)} + r_{1(u,v)}, j \cdot L \cdot v + o \cdot r_{0(v)} + r_{2(u,v)}, j \cdot M \cdot v + p \cdot r_{0(v)} + r_{3(u,v)})$$

Em que as novas variáveis surgem simplesmente para que a equação fique menos carregada visualmente. Essas variáveis são dadas por:

$$r_{0(v)} = \frac{y'_1 \cdot v}{\arccos\left(\frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}\right)};$$

$$r_{1(u,v)} = A \cdot S_{1(u,v)} + n \cdot S_{2(u,v)} + x_0;$$

$$r_{2(u,v)} = B \cdot S_{1(u,v)} + o \cdot S_{2(u,v)} + y_0;$$

$$r_{3(u,v)} = C \cdot S_{1(u,v)} + p \cdot S_{2(u,v)} + z_0;$$

$$S_{1(u,v)} = a' \cdot u \cdot \cos v - b' \cdot u \cdot \sin v;$$

$$S_{2(u,v)} = b' \cdot u \cdot \cos v + a' \cdot u \cdot \sin v.$$

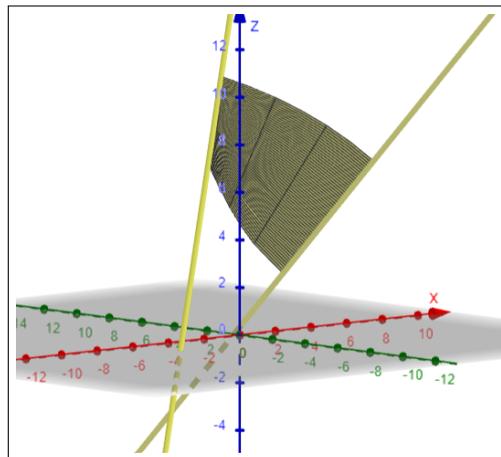
**Ex:** Seja  $X_0 = (5, 7, 8) + t_0 \cdot (9, 8, 7)$ , e  $X_1 = (3, 2, 1) + t_1 \cdot (5, -4, 8)$ , aplicando a proposição (3.2.1), teremos que o helicoide entre  $X_0$  e  $X_1$  vai ser dado por:

$$X(v, u) = (5 - 0.18v, 7 + 6.34v, 8 + 3.28v) + u \cdot (-0.20 \sin(v) + 0.65 \cos(v), 0.76 \sin(v) + 0.57 \cos(v), -0.62 \sin(v) + 0.50 \cos(v))$$

com  $-0.3389\pi \leq v \leq 0$ .

A Figura 6 abaixo mostra esse exemplo.

**Figura 6 – Helicoide entre duas retas reversas**



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

#### 4 APLICAÇÕES DOS HELICOIDES NA ARQUITETURA E CONSTRUÇÃO CIVIL

Conforme provado na seção 2.2, o helicoide é uma superfície mínima, e isso pode torná-lo particularmente interessante para aplicações arquitetônicas. No capítulo 72 do livro organizado por Williams e Ostwald, *Architecture and Mathematics From Antiquity to the Future*, destaca-se em Capanna (2015, p. 381, tradução própria) que:

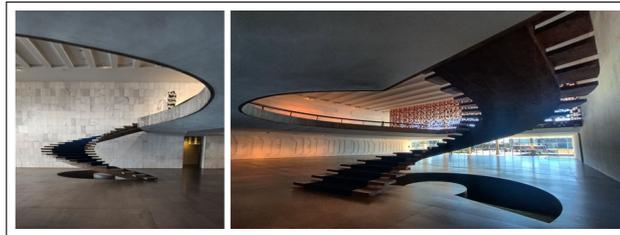
1. As formas das superfícies mínimas podem ser surpreendentes do ponto de vista estético;
2. As superfícies mínimas permitem o uso ideal dos materiais;

3. As estruturas das superfícies mínimas têm rigidez geométrica natural.

Por conta disso, nessa seção apresentaremos algumas aplicações de helicoides na arquitetura, as quais, segundo Glaeser (2007, *apud* MARTÍN-PASTOR; LÓPEZ-MARTÍNEZ, 2020), ainda não estão amplamente disseminadas na prática profissional desta área.

A seguir, nas Figuras 7, 8 e 9, podem ser vistos alguns exemplos de aplicação de helicoides em projetos arquitetônicos.

**Figura 7 – Escada Helicoidal do Palácio do Itamaraty de Brasília, Brasil**



Fonte: (CAVALCANTI, 2024).

**Figura 8 – Escada helicoidal do monumento em Dražgoše, vila de Železniki, Eslovênia**



Fonte: (CONTE, 2019).

**Figura 9 – Torre residencial em formato de dupla Hélice de Taipei, Taiwan**



Fonte: (BHADESHIA, 2023).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho surgiu com o objetivo de responder à respectiva pergunta: "Dado um par de retas reversas quaisquer no espaço euclidiano tridimensional, qual é o helicoide de uma única volta que passa por essas duas retas?". Para alcançar esse objetivo, foi realizada uma extensa pesquisa bibliográfica, juntamente com uma reflexão aprofundada sobre os conceitos já consolidados na matemática que se relacionavam com o problema, com o intuito de obter um embasamento que fosse capaz de criar uma maneira de responder à esta questão.

Mediante o exposto, ao longo do artigo, percebe-se que o objetivo foi contemplado, já que foi criada uma solução para determinar a parametrização do helicoide que passa por duas retas reversas quaisquer, por meio das proposições que foram demonstradas. Além disso, foram apresentadas algumas aplicações práticas dos helicoides, reforçando sua relevância na área de estudo.

Agradecimentos à FAPERGS pelo apoio financeiro e concessão da bolsa, assim como ao professor Dr. Giovanni Nunes pelas sugestões que contribuíram para melhorar o presente texto. Além disso, expressa-se a minha gratidão a Samuel de Siqueira Cavalcanti, Roberto Conte e ao professor Sir Harshad Bhadeshia por autorizarem o uso de suas fotografias nas Figuras 7, 8 e 9, respectivamente.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, P. **Geometria Diferencial**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

BARBOSA, J. **Geometria Euclidiana Plana**. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1994.

BHADESHIA, H. **Sites in Taipei, Taiwan, double-helix building, September 2023**. University of Cambridge, 2023. Disponível em: <<https://www.phase-trans.msm.cam.ac.uk/2023/aa/index.html>>. Acesso em: 31 mar. 2025.

CAPANNA, A. Conoids and Hyperbolic Paraboloids in Le Corbusier's Philips Pavilion. In: WILLIAMS, K.; OSTWALD, M. J. (Eds.). **Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future**, Volume II: The 1500s to the Future. Cham: Springer, 2015. cap.72, pp.377-388.

CARMO, M. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

CARVALHO, P. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

CAVALCANTI, S. **Escada do Itamaraty**. Brasília, ago. 2024. *Facebook*: fotografia. Disponível em: <[https://www.facebook.com/photo.php?fbid=1267566474560283&set=pb.100039208271938.-2207520000&type=3&locale=es\\_LA](https://www.facebook.com/photo.php?fbid=1267566474560283&set=pb.100039208271938.-2207520000&type=3&locale=es_LA)>. Acesso em: 31 mar. 2025.

CAVALCANTI, S. **Escada do Itamaraty**. Brasília, ago. 2024. *Facebook*: fotografia. Disponível em: <[https://www.facebook.com/photo/?fbid=1267569937893270&set=pb.100039208271938.-2207520000&locale=es\\_LA](https://www.facebook.com/photo/?fbid=1267569937893270&set=pb.100039208271938.-2207520000&locale=es_LA)>. Acesso em: 31 mar. 2025.

CONTE, R. **Monument to the Battle of Drazgose**. In: Architectuul. Disponível em: <<https://architectuul.com/architecture/monument-to-the-battle-of-drazgose>>. Acesso em: 31 mar. 2025.

FRENSEL, K., DELGADO, J. **Geometria Analítica II - Aula 5**. Notas de aula. Universidade Federal Fluminense, 2008. Disponível em: <<https://www.professores.uff.br/katiafrensel/2017/08/30/>>. Acesso em: 09 mar. 2025.

GORIELY, A.; NEUKIRCH, S.; HAUSRATH, A. Helices Through 3 or 4 points?. **Note di matematica**, v.32, n.1, p.87-103, 2012.

MARTÍN-PASTOR, A.; LÓPEZ-MARTINES, A. Developable Helicoids from cylindrical helix and its application as architectural surface. In: Viana V.; Murtinho V.; Xavier J. (Eds.). **Thinking, Drawing, Modelling**. Cham: Springer, 2020. cap.7, pp.107-120.

TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.