



Aplicação de grafos em um problema de rede*

Application of graphs in a network problem

Magali Maria de Araújo Barroso¹

Resumo

Este artigo apresenta o problema da expansão de uma rede rodoviária de custo mínimo, para interligar um conjunto de cidades de uma dada região, utilizando conceitos de grafos, tais como, Árvore Geradora Mínima, Caminho Mínimo e Árvore de Steiner. Faz-se a modelagem matemática, na qual identificam-se os elementos representativos dos vértices, a relação existente entre eles, que define as arestas, e a questão a ser respondida para o problema de grafo, que soluciona o problema original. Conjecturam-se possibilidades de apresentação da situação problema, explicitando conceitos e algoritmos necessários para o entendimento e discussão das formas de resolução.

Palavras-chave: Árvore de Steiner. Árvore Geradora Mínima. Caminho mínimo. Aplicação de grafos.

*Comunicação convidada

¹Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação. COPPE/UFRJ/1987. Professora do Centro Universitário de Belo Horizonte, Brasil, magali.barroso@prof.unibh.br .

Abstract

This article presents the problem of the expansion of the road network at minimum cost, to interconnect a set of cities in a given region, using concepts of graphs, such as Minimum Spanning Tree, Minimum Path, and Steiner Tree. The mathematical modeling is performed, identifying representative elements of the vertices, the relationship between them, defining the edges, and the question to be answered to the graph problem, that solves the original problem. Conjecture up possibilities of presenting problem situation, expliciting concepts and algorithms necessary for understanding and discussion of the forms of resolution.

Keywords: Graph. Steiner tree. Minimum Spanning Tree. Minimum path. Graphs Applications.

1 INTRODUÇÃO

Quando se vê uma foto de uma cidade percebe-se sua arquitetura, localizando no tempo a época da construção das edificações e, buscando na história, influências recebidas pelos que a projetaram. Se a foto é panorâmica observam-se o espaço, o relevo do sítio que a acolhe, os rios que ainda persistem em aflorar pela superfície, enquanto outros já canalizados se escondem debaixo de largas avenidas. Essas nasceram mais estreitas e, com o passar dos anos, foram sendo estendidas para atender demandas que não podiam esperar. Vê-se, também, o tipo de vegetação e sua tonalidade, a incidência da luz do sol. Se a foto mostra pessoas andando nas ruas, podem-se notar as características de suas roupas, que denotam o clima, a estação do ano ou até mesmo a localização geográfica da cidade.

Ler imagens de uma foto ou de uma pintura é exercício prazeroso. A autora teve essa experiência várias vezes. A primeira quando ainda cursava a oitava série do equivalente ao curso fundamental. O livro era “Geografia, Paisagens Brasileiras” e o Professor, assim mesmo com letras maiúsculas, era Getúlio Vargas Barbosa, um de seus preferidos, que ensinou a turma uma nova forma de aprender, observando paisagens. No livro “Os Canibais estão na sala de jantar”, Arnaldo Jabor (JABOR, 1993) apresenta crônicas, criadas a partir da observação de fotos e das emoções suscitadas por elas. Um dos textos é sobre a tela exposta no Museu do Prado, em Madri, “As meninas” de Velázquez, no qual o protagonista, um jornalista, descobre, num *insight*, que o pintor retrata o espectador, que a contempla.

Em “Lendo Imagens”, Alberto Manguel faz várias viagens. Uma delas pelas obras de Aleijadinho e o leitor se emociona com sua forma poética de transcrever suas descobertas sobre “as histórias explícitas ou secretamente entrelaçadas em todos os tipos de obra de arte” (MANGUEL, 2001). Vermeer (1632-1675) pinta, em 1665, o quadro Moça do Brinco de Pérola (SCHENEIDER, 2001) e em 1999, Tracy Chevalier (CHEVALIER, 2002) se apaixona pelo quadro e dá vida à moça, criando uma história que a envolvia com o pintor, no livro Moça com Brinco de Pérola. Em 2003, Peter Webber (ADOROCINEMA, 2004) dirige o filme de mesmo nome. A sua equipe estuda a obra do pintor holandês para recriar, de forma magistral, a atmosfera de Delft, na Holanda, a cidade do pintor e que acolhe o enredo.

Matemáticos também leem imagens. Observa na foto de uma cidade, sua geometrização. O paralelismo, as perpendiculares ou obliquidades, círculos, quadrados, triângulos, ângulos dos mais variados, sólidos regulares ou não, linhas, pontos, planos, superfícies. O matemático consegue desconstruir as cidades e seus serviços em planos paralelos, considerando em cada plano, o que é essencial para a representação de situações a serem analisadas. A partir dessas representações, aplica-se a teoria matemática e obtém-se a solução de vários problemas. Essa representação formal para modelar uma situação é uma abstração da realidade.

O matemático, depois da primeira etapa, já não mais observa a imagem, e sim, o modelo abstrato criado, um conjunto de planos ou camadas, contendo pontos e linhas representando

elementos da cidade, a relação entre eles e a quantificação de valores a eles associados.

Nos planos podem ser registrados:

- Localização de escolas;
- Localização de estabelecimentos comerciais das mais variadas naturezas;
- Localização de hospitais, postos de saúde e policiais;
- Redes metroviária e férrea;
- Redes viária e rodoviária;
- Redes de água e esgoto;
- Rede de energia elétrica e de iluminação pública;
- Rede telefônica e torres de telefonia celular;
- Traçado das linhas de ônibus com os respectivos pontos de parada;
- Traçados de aerovias;
- Trajetos de transporte de serviços, tais como, caminhão de lixo, correios, entrega de mercadorias.

Quando se tem um conjunto de pontos e outro de linhas fazendo a conexão de pares destes pontos tem-se um grafo. Duas restrições são feitas sobre o conjunto de pontos: deve ser finito e não vazio. As linhas representam alguma relação definida para aquele conjunto de pontos, portanto, as linhas podem ter, ou não, direcionamento. Quando elas o têm, o grafo é direcionado, também chamado de digrafo. Os pontos são denominados vértices e as linhas, arestas. Estes são os elementos fundamentais dos grafos e digrafos. Todos os outros conceitos e resultados que os relacionam formam a Teoria dos Grafos, que é utilizada com eficiência para resolver problemas de várias áreas do conhecimento.

Três problemas geográficos que foram solucionados utilizando a Teoria dos Grafos, sob a orientação ou coorientação da autora, por alunos de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Geografia – Tratamento da Informação Espacial da PUC Minas, Minas Gerais, estão enunciados a seguir:

- Determinação de redes atingidas na interrupção do abastecimento de água: desenvolvimento de aplicativo computacional, utilizando GIS e grafos (CANÇADO, 2000; BARROSO; BARROSO, 2013);
- Localização de escolas públicas em Betim (ASSIS, 2001; ASSIS; BARROSO; ABREU, 2003);

- Sistema de Informação sobre o itinerário do transporte urbano na região central de Belo Horizonte (LIMA, 2001; LIMA; BARROSO; MUZZARELLI, 2003).

O objetivo geral deste trabalho é identificar as rodovias a serem asfaltadas para interligar, com custo mínimo, um conjunto de cidades de uma dada região, utilizando grafos em sua modelagem e resolução.

Os objetivos específicos são:

1. Identificar a teoria necessária para solucionar o problema;
2. Apresentar a modelagem matemática para algumas formas da situação problema, explicitando possíveis soluções;
3. Especificar algoritmos utilizados;

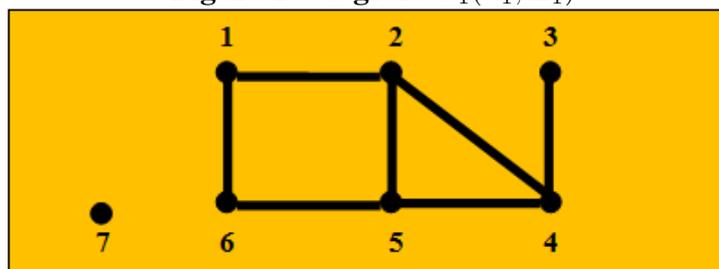
Este texto está assim organizado: a Seção 2 contém os conceitos fundamentais e algoritmos da Teoria dos Grafos, necessários para a compreensão da aplicação; a terceira seção dá o conceito de árvore, sendo, algumas delas, especiais; a quarta é dedicada à aplicação; finalmente estão a conclusão, os agradecimentos e as referências.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Conforme Szwarcfiter (1984), “um grafo $G(V, E)$ é uma estrutura matemática constituída de um conjunto V , finito e não vazio de n vértices, e um conjunto E de m arestas, que são pares não ordenados de elementos de V ”. Assim, a cardinalidade de V é n e a de E é m : $|V| = n$ e $|E| = m$. Em um grafo, toda aresta é definida por dois vértices que são seus extremos. Encontra-se, na Figura 1, a representação geométrica do grafo $G_1(V_1, E_1)$, definido pelos conjuntos:

$$V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ e } E_1 = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (5, 2), (6, 5)\}.$$

Figura 1 – O grafo $G_1(V_1, E_1)$



Fonte: Elaborada pela autora

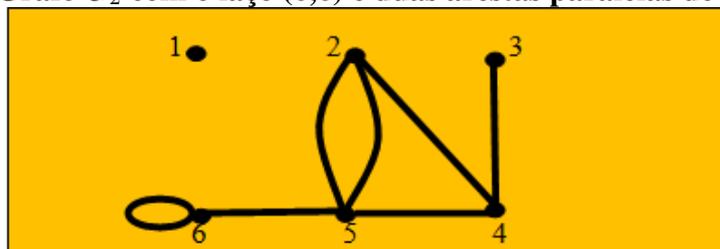
Muitas vezes o diagrama, que corresponde à representação geométrica, se confunde com o próprio grafo, como ensina Szwarcfiter (1984).

Todos os outros conceitos da Teoria dos Grafos surgem em função dos vértices e das arestas, por serem seus elementos fundamentais. A aresta (v, w) de um grafo é definida pelos seus vértices extremos v e w ; ela incide em v e em w e, além disso, diz-se que v e w são vértices adjacentes. Assim, um novo conjunto se manifesta, “o conjunto dos vértices adjacentes ao vértice v , denotado por $Adj(v)$ e definido como: $Adj(v) = \{w, talque(v, w) \in E\}$ ”, como consta em (BARROSO, 2007). O vértice 7 do Grafo G_1 é denominado isolado, porque não é extremo de aresta alguma e $Adj(7) = \emptyset$.

Um laço é uma aresta cujos extremos são iguais. Duas arestas definidas pelo mesmo par de vértices são ditas arestas paralelas. Um grafo simples é aquele que não possui laços, nem arestas paralelas, segundo Deo (1974, p.2). Muitos autores, tais como Harary (1972) e Gibson (1985), denominam multigrafo, o grafo sem laços que admite arestas paralelas. Nesses grafos e naqueles que possuem laços, os conjuntos de arestas e o de vértices adjacentes podem ser multiconjuntos. Nos multiconjuntos, um mesmo elemento pode ocorrer mais de uma vez, contrariamente ao que acontece nos conjuntos (BARROSO; BARROSO, 2013).

Dá-se o nome de grau de v , $grau(v)$, ao número de incidências de arestas em um vértice v . Para grafos simples, esse número é igual à cardinalidade de $Adj(v)$, resultando: $grau(v) = |Adj(v)|$. A Figura 2 apresenta o grafo G_2 , com um laço e duas arestas paralelas.

Figura 2 – Grafo G_2 com o laço (6,6) e duas arestas paralelas de extremos 2 e 5



Fonte: Elaborada pela autora

As tabelas 1 e 2, dadas a seguir, contêm $grau(v)$ e $Adj(v)$ para grafos G_1 e G_2 .

Tabela 1 – Graus e conjunto de vértices adjacentes do grafo G_1

v	grau(v)	Adj(v)
1	2	{2,6}
2	3	{1,4,5}
3	1	{4}
4	3	{2,3,5}
5	3	{2,4,6}
6	2	{1,5}
7	0	{ \emptyset }

Tabela 2 – Graus e conjuntos e multiconjuntos de vértices adjacentes do grafo G_2

v	grau(v)	Adj(v)
0	0	\emptyset
2	3	{1,4,5}
3	1	{4}
4	3	{2,3,5}
5	4	{2,4,6}
6	3	{1,5}

A seguir, são apresentadas algumas das principais operações realizadas com vértices e arestas de um grafo simples e indicadas as condições em que elas podem ser aplicadas. Suas definições podem ser ampliadas para trabalhar com subconjuntos de V e de E .

- Inclusão da aresta (v, w)

Exigência: os vértices v e w devem pertencer a V .

Grafo Resultante: $G + (v, w)$ definido por V e $E \cup \{(v, w)\}$.

Caso (v, w) já pertença a G , o grafo resultante terá um par de arestas paralelas. Se $v = w$, há o surgimento de um laço.

- Exclusão da aresta (v, w)

Exigência: a aresta (v, w) deve pertencer a E .

Grafo Resultante: $G - (v, w)$ definido por V e $E - \{(v, w)\}$.

- Inclusão do vértice v

Exigência: o vértice v não deve pertencer a V .

Grafo Resultante: $G + v$ definido por $V \cup \{v\}$ e E .

- Exclusão do vértice v

Exigência: o vértice v deve pertencer a V e $n > 1$.

Grafo Resultante: $G - v$ definido por $V - \{v\}$ e $E - \{(v, u), \forall u \in Adj(v)\}$. A restrição $n > 1$, imposta nessa operação, garante que, mesmo após a exclusão do vértice, a estrutura remanescente continua sendo um grafo.

- Fusão dos vértices v e w

Exigência: os vértices v e w devem pertencer a V .

Grafo Resultante: $G^{v.w}$ definido por $(V - \{v, w\}) \cup \{v.w\}$ e $((E - \{(v, u), \forall u \in Adj(v)\}) - \{(w, u), \forall u \in Adj(w)\}) \cup \{(v.w, u), \forall u \in Adj(v) \cup Adj(w) - \{v, w\}\} \cup \{(v.w, u), \forall u \in Adj(v) \cap Adj(w)\} \cup \{(v.w, v.w), \text{ se } (v, w) \in E\}$.

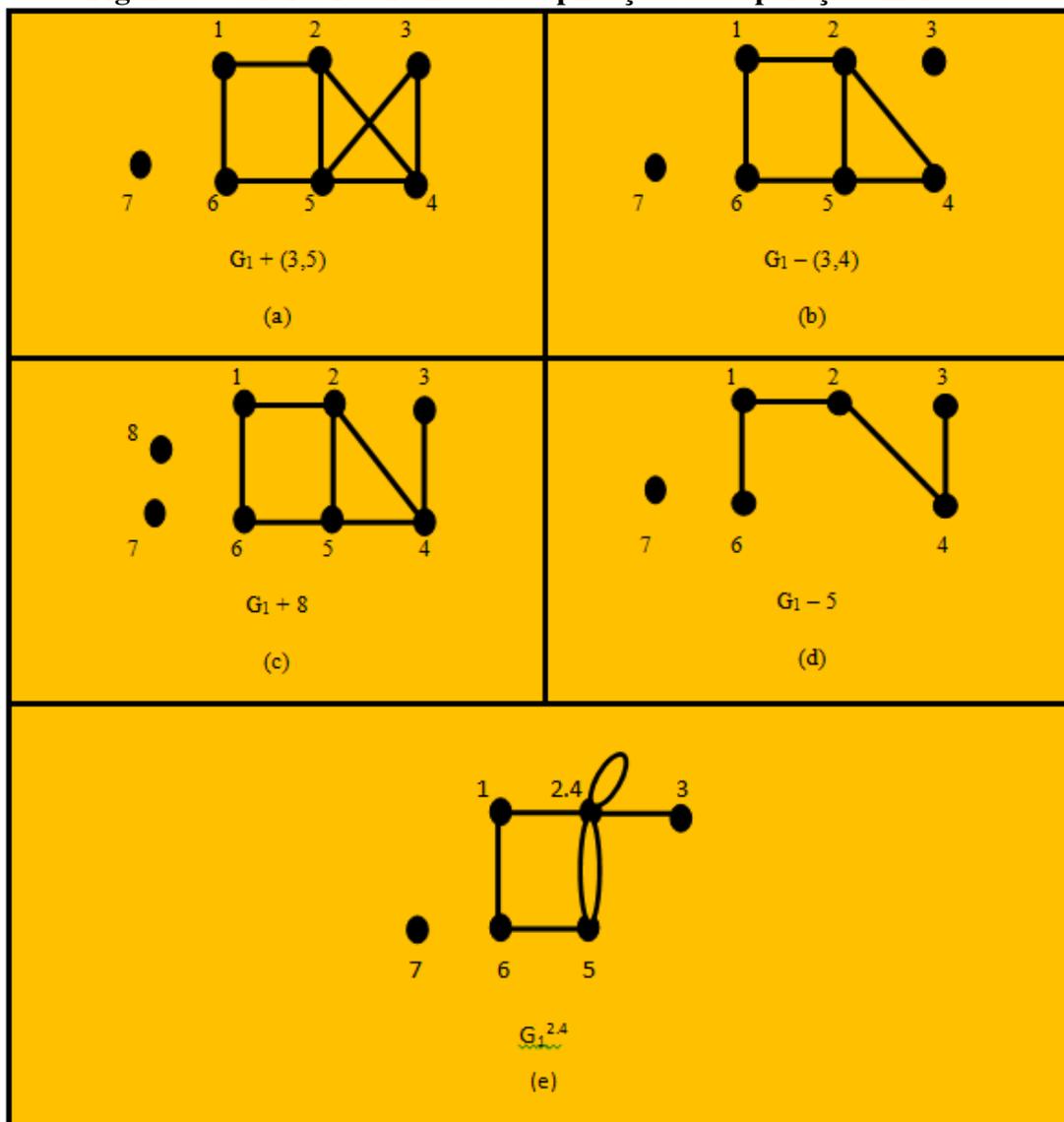
Como consequência da aplicação dessa operação, podem ocorrer o surgimento de laços e/ou arestas paralelas. Caso essa multiplicidade de elementos não seja relevante para a nova estrutura formada, podem-se eliminar os laços e preservar apenas uma cópia das arestas paralelas. Essa mesma operação denomina-se Contração de vértices, em Boaventura Netto (1996), e Condensação de vértices em Szwarcfiter (1984).

Encontram-se, na Figura 3, os grafos resultantes da aplicação das operações indicadas no grafo $G_1(V_1, E_1)$ da Figura 1.

Um subgrafo de G é qualquer grafo resultante da exclusão de um subconjunto de vértices ou de arestas de G . Caso a exclusão restrinja-se a um subconjunto de arestas, o grafo resultante é dito subgrafo gerador. Ele possui o mesmo conjunto de vértices do grafo original. Por outro lado, a exclusão de um subconjunto de vértices V' de G produz o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $V - V'$. Conforme consta em Harary (1972, p.11), se G' é subgrafo de G , então G é supergrafo de G' .

Observando-se a Figura 3, verifica-se que $G_1 - 5$ e $G_1 - (3, 4)$ são subgrafos de G_1 . Por outro lado, G_1 é subgrafo de $G_1 + 7$ e de $G_1 + (3, 5)$ e estes são supergrafos de G_1 . Entretanto, as alterações estruturais de um grafo ao se aplicar a operação de fusão de vértices, são mais

Figura 3 – Grafos resultantes das aplicações das operações indicadas



Fonte: Elaborada pela autora

profundas que as anteriores. O grafo $G_1^{2,3}$ não é subgrafo, nem supergrafo, de G_1 , como consta em (BARROSO, 2007).

Um caminho entre dois vértices v_1 e v_k é uma seqüência de vértices $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, onde $(v_j, v_{j+1}), 1 \leq j \leq k - 1$, são arestas distintas. Alguns caminhos do grafo G_1 são: $\langle 1, 2, 4, 3 \rangle$, $\langle 1, 6 \rangle$ e $\langle 2, 4, 5, 6, 1, 2 \rangle$. O último é um caminho fechado, ou seja, o vértice inicial e o final coincidem e, por essa razão, ele além de caminho é, também, denominado ciclo. Um grafo que não possui ciclos é denominado grafo acíclico.

Se existe um caminho entre os vértices v e w de um grafo, diz-se que v alcança w . Se um vértice de um grafo alcança todos os demais, então o grafo é conexo. Caso contrário, é desconexo. G_1 é um grafo desconexo, porque o vértice 3 não alcança o vértice 7. Os subgrafos maximais conexos de G são denominados componentes. Se a exclusão de um vértice provoca o aumento de componentes de um grafo, então ele é denominado articulação.

Podem-se associar valores aos vértices e/ou às arestas de um grafo. Nesse caso tem-se o

grafo valorado. O custo de um caminho (ciclo) é a soma dos valores das arestas que o formam. Todo grafo é valorado, já que se não estiverem atribuídos valores aos vértices e às suas arestas, consideram-se que eles sejam unitários.

2.1 Caminho mínimo

Dado um grafo $G(V, E)$, o caminho mínimo entre dois vértices v e w é aquele cuja soma dos valores de suas arestas é a menor possível dentre todas as possibilidades (SZWARCFITER, 1984). Denomina-se distância entre dois vértices v e w , $d(v, w)$, ao custo do caminho mínimo entre eles. No grafo da Figura 3(a), o caminho mínimo entre os vértices 1 e 3 tem custo 3, isto é, $d(1, 3) = 3$. Existem três caminhos de custo 3 : $\langle 1, 2, 4, 3 \rangle$, formado pelas arestas: $(1, 2)$, $(2, 4)$ e $(4, 3)$, $\langle 1, 2, 5, 3 \rangle$, formado pelas arestas: $(1, 2)$, $(2, 5)$ e $(5, 3)$ ou $\langle 1, 6, 5, 3 \rangle$, formado pelas arestas: $(1, 6)$, $(6, 5)$ e $(5, 3)$. Como não existe caminho entre os vértices 3 e 7, considera-se que $d(3, 7) = \infty$.

O Algoritmo 1 baseia-se no Algoritmo de Dijkstra, desenvolvido em 1959, e de complexidade $O(n^2)$ para a determinação de um caminho mínimo entre dois vértices v e w de um grafo, cujas arestas têm valores positivos. Utiliza-se o vetor r_i para armazenar o penúltimo vértice do caminho mínimo entre 1 e i (BARROSO, 1998, p.70).

Algoritmo 1 – Caminho mínimo – (Baseado em Dijkstra)

Algorithm 1: Determina o caminho mínimo e seu custo entre dois vértices dados de um grafo conexo com arestas de valores positivos.

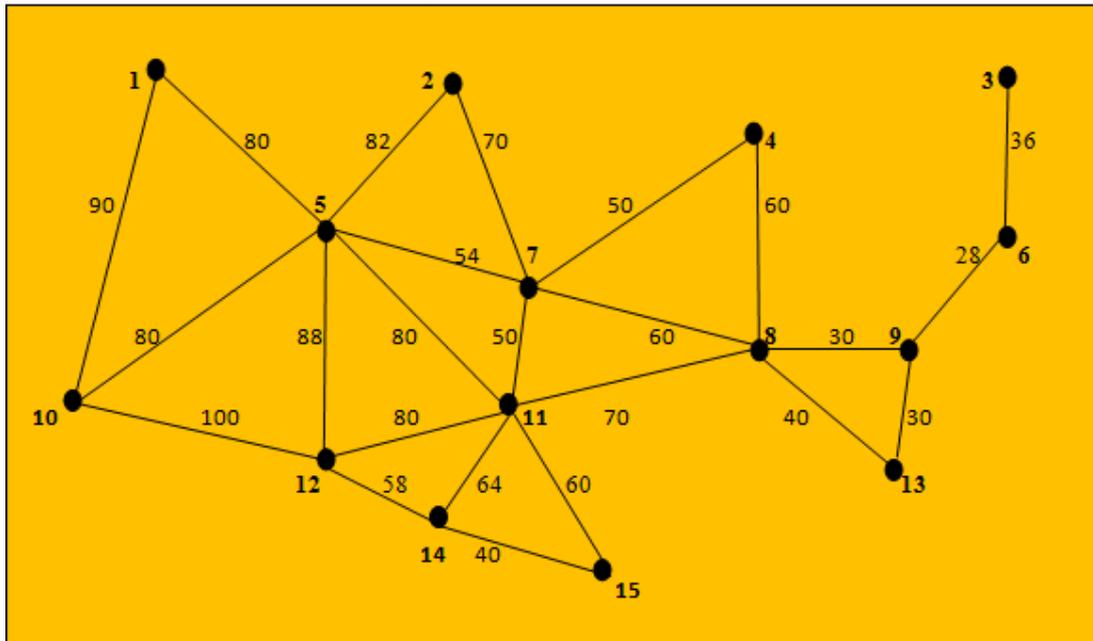
- 1: **Entrada:** – $G(V, E)$ conexo, os vértices v e w
- 2: A matriz $M_{n \times n}$, assim definida:
- 3: $m_{ii} = 0$
- 4: $m_{ij} = \text{valor da aresta}(i, j)$ se $(i, j) \in E$
- 5: $= \infty$, caso contrário
- 6: **Saída:** O Caminho Mínimo de v a w e seu custo
- 7: Enumere os vértices de G de 1 a n , atribuindo 1 ao vértice v e n ao vértice w .
- 8: $c_1 \leftarrow 0$
- 9: $r_1 \leftarrow 0$
- 10: para $i = 2, 3, \dots, n$ faça
- 11: se $(1, i) \in E$ então
- 12: $c_i \leftarrow m_{1i}$
- 13: $r_i \leftarrow 1$
- 14: senão
- 15: $c_i \leftarrow \infty$
- 16: $r_i \leftarrow \infty$
- 17: fimse
- 18: fimpara
- 19: $P \leftarrow \{1\}$
- 20: $T \leftarrow \{2, 3, \dots, n\}$
- 21: enquanto $n \in T$ faça
- 22: encontrar $k \in T$ tal que $c_k = \min \{c_j\} \forall j \in T$
- 23: Exclua k de T
- 24: Inclua k em P
- 25: para $i \in T$ faça
- 26: se $C_k + m_{ki} \leq c_j$ então
- 27: $r_i \leftarrow k$
- 28: $c_i \leftarrow c_k + m_{ki}$
- 29: fimse
- 30: fimpara
- 31: fimenquanto
- 32: $i \leftarrow 1$
- 33: $p(i) \leftarrow r_n$
- 34: enquanto $p(i) \neq 1$ faça
- 35: $p(i+1) \leftarrow r_{p(i)}$
- 36: $i \leftarrow i + 1$
- 37: fimenquanto
- 38: **Imprima:** o caminho mínimo de 1 a n , imprimindo os vértices do vetor p de i a 1
- 39: **Imprima:** o custo do caminho de v a w , ou seja, a $d(v, w) = c_n$.
- 40: **fimAlgoritmo**

Fonte: Baseado em Dijkstra

A seguir é mostrado como determinar o caminho mínimo entre os vértices 1 e 15, dado o grafo $G(V, E)$ da Figura 4.

Sendo $n = 15$ e a matriz M é:

Figura 4 – Grafo G(V,E)



Fonte: Elaborada pela autora

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	∞	∞	∞	80	∞	∞	∞	∞	90	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	∞	∞	82	∞	70	∞							
3	∞	∞	0	∞	∞	36	∞								
4	∞	∞	∞	0	∞	∞	50	60	∞						
5	80	82	∞	∞	0	∞	54	∞	∞	80	80	88	∞	∞	∞
6	∞	∞	36	∞	∞	0	∞	∞	28	∞	∞	∞	∞	∞	∞
7	∞	70	∞	50	54	∞	0	60	∞						
8	∞	50	∞												
9	∞	∞	∞	60	∞	∞	60	0	30	∞	70	∞	40	∞	∞
10	90	∞	∞	∞	80	∞	∞	∞	∞	0	∞	100	∞	∞	∞
11	∞	∞	∞	∞	80	∞	50	70	∞	∞	0	80	∞	64	60
12	∞	∞	∞	∞	88	∞	∞	∞	∞	100	80	0	∞	58	∞
13	∞	∞	∞	∞	∞	∞	40	30	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞
14	∞	64	58	∞	0	40									
15	∞	60	∞	∞	40	0									

Dados iniciais

$$P = \{1\}$$

$$T = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
5	80	1
10	90	1
2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,15	∞	∞

1. iteração $k = 5$

$$c_5 = \min$$

$$\{\infty, \infty, \infty, 80, \infty, \infty, \infty, \infty, 90, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty\} =$$

80

$$P = \{1, 5\}$$

$$T = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	$\min\{\infty, 80 + 82\} = 162$	5
5	80	1
7	$\min\{\infty, 80 + 54\} = 134$	5
10	$\min\{90, 80 + 80\} = 90$	1
11	$\min\{\infty, 80 + 80\} = 160$	5
12	$\min\{\infty, 80 + 88\} = 168$	5
3,4,6,8,9,13,14,15	∞	∞

2. iteração $k = 10$

$$c_{10} = \min$$

$$\{162, \infty, \infty, \infty, 134, \infty, \infty, 90, 160, 168, \infty, \infty, \infty\} =$$

90

$$P = \{1, 5, 10\}$$

$$T = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	162	5
5	80	1
7	134	5
10	90	1
11	$\min\{160, \infty\} = 160$	5
12	$\min\{168, 90 + 100\} = 168$	5
3,4,6,8,9,13,14,15	∞	∞

3. iteração $k = 7$

$$c_7 = \min$$

$$\{162, \infty, \infty, \infty, 134, \infty, \infty, 160, 168, \infty, \infty, \infty\} =$$

134

$$P = \{1, 5, 10, 7\}$$

$$T = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	$\min\{162, 134 + 70\} = 162$	5
4	$\min\{\infty, 134, 150\} = 184$	7
5	80	1
7	134	5
8	$\min\{\infty, 134 + 60\} = 198$	7
10	90	1
11	$\min\{160, 134 + 50\} = 160$	5
12	$\min\{168, 134 + \infty\} = 168$	5
3,6,9,13,14,15	∞	∞

4. iteração $k = 11$

$$c_{11} = \min$$

$$\{162, \infty, 188, \infty, 198, \infty, 168, \infty, \infty, \infty\} = 160$$

$$P = \{1, 5, 10, 7, 11\}$$

$$T = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	$\min\{162, 160 + \infty\} = 162$	5
4	$\min\{184, 160 + \infty\} = 188$	7
5	80	1
7	134	5
8	$\min\{198, 160 + 70\} = 198$	7
10	90	1
11	160	5
12	$\min\{168, 160 + 80\} = 168$	5
14	$\min\{\infty, 160 + 64\} = 228$	11
15	$\min\{\infty, 160 + 60\} = 220$	11
3,6,9,13	∞	∞

5. iteração $k = 2$

$$c_2 = \min$$

$$\{162, \infty, 188, \infty, 198, \infty, 168, 228, 220\} = 162$$

$$P = \{1, 5, 10, 7, 11, 12\}$$

$$T = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	162	5
4	$\min\{188, 162 + \infty\} = 188$	7
5	80	1
7	134	5
8	$\min\{198, 162 + \infty\} = 198$	7
10	90	1
11	160	5
12	$\min\{168, 162 + \infty\} = 168$	5
14	$\min\{228, 162 + \infty\} = 228$	11
15	$\min\{220, 162 + \infty\} = 220$	11
3,6,9,13	∞	∞

6. iteração $k = 12$

$$c_{12} = \min$$

$$\{\infty, 188, \infty, 198, \infty, 228, 220\} = 162$$

$$P = \{1, 5, 10, 7, 11, 2, 12\}$$

$$T = \{3, 4, 6, 8, 9, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	162	5
4	$\min\{188, 168 + \infty\} = 188$	7
5	80	1
7	134	5
8	$\min\{198, 162 + \infty\} = 198$	7
10	90	1
11	160	5
12	168	5
14	$\min\{228, 168 + 58\} = 226$	12
15	$\min\{220, 162 + \infty\} = 220$	11
3,6,9,13	∞	∞

7. iteração $k = 4$

$$c_4 = \min$$

$$\{\infty, 188, \infty, 198, \infty, \infty, 226, 220\} = 188$$

$$P = \{1, 5, 10, 7, 11, 2, 12, 4\}$$

$$T = \{3, 6, 8, 9, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	162	5
4	188	7
5	80	1
7	134	5
8	$\min\{198, 188 + 60\} = 198$	7
10	90	1
11	160	5
12	168	5
14	$\min\{228, 188 + \infty\} = 226$	12
15	$\min\{220, 188 + \infty\} = 220$	11
3,6,9,13	∞	∞

8. iteração $k = 8$

$$c_{12} = \min$$

$$\{\infty, \infty, 198, \infty, \infty, 226, 220\} = 198$$

$$P = \{1, 5, 10, 7, 11, 2, 12, 4, 8\}$$

$$T = \{3, 6, 9, 13, 14, 15\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	162	5
4	188	7
5	80	1
7	134	5
8	198	7
9	$\min\{\infty, 198 + 30\} = 228$	8
10	90	1
11	160	5
12	168	5
13	$\min\{\infty + 198, 40\} = 238$	8
14	$\min\{220, 188 + \infty\} = 226$	12
14	$\min\{220, 198 + \infty\} = 220$	11
3,6	∞	∞

9. iteração $k = 15$

$$c_{15} = \min$$

$$\{\infty, \infty, 228, 238, 226, 220\} = 220$$

$$P = \{1, 5, 10, 7, 11, 2, 12, 4, 8, 15\}$$

$$T = \{3, 6, 9, 13, 14\}$$

i	c_i	r_i
1	0	0
2	162	5
4	188	7
5	80	1
7	134	5
8	198	7
9	$\min\{228, 220 + \infty\} = 228$	8
10	90	1
11	160	5
12	168	5
13	$\min\{238, 220 + \infty\} = 238$	8
14	$\min\{226, 220 + 40\} = 226$	12
15	220	11
3,6	∞	∞

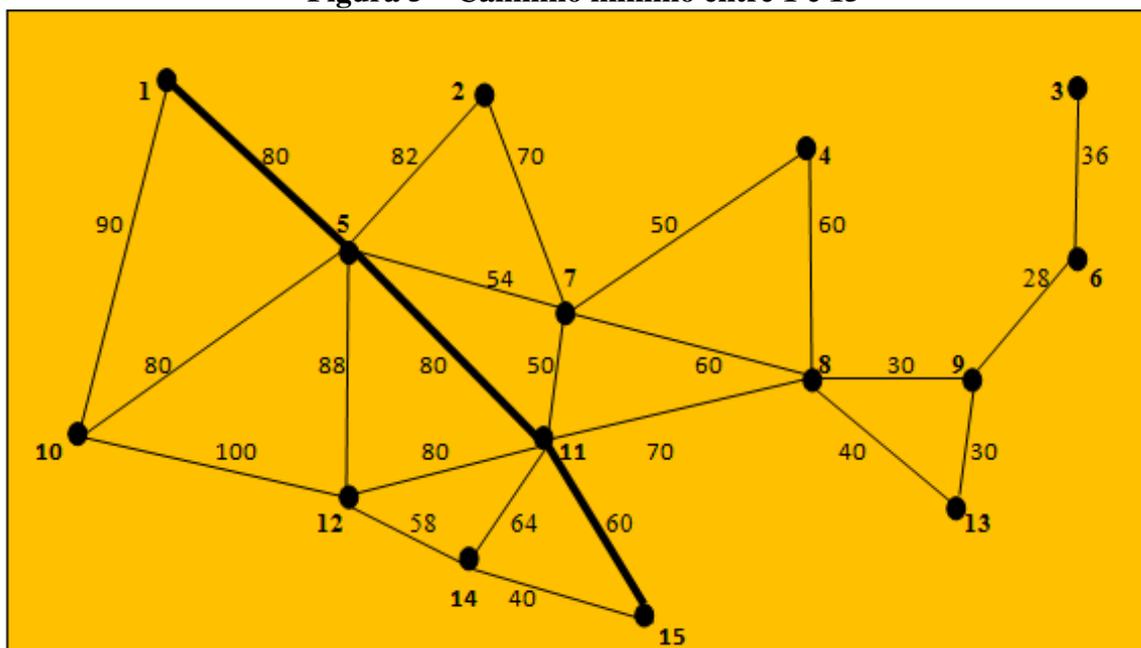
Como o vértice 15 passou para o conjunto P, o custo do caminho mínimo entre 1 e 15 é $c_{15} = 220$ e o caminho é formado pela sequência invertida de vértices: 15, $r_{15} = 11$, $r_{11} = 5$ e $r_5 = 1$, ou seja: $\langle 1, 5, 11, 15 \rangle$. A Figura 5 mostra o caminho mínimo entre 1 e 15 encontrado.

3 ÁRVORE

Se um grafo for conexo e acíclico, ele é uma árvore (SZWARCFITER, 1984, p.43). A Figura 6 contém uma árvore.

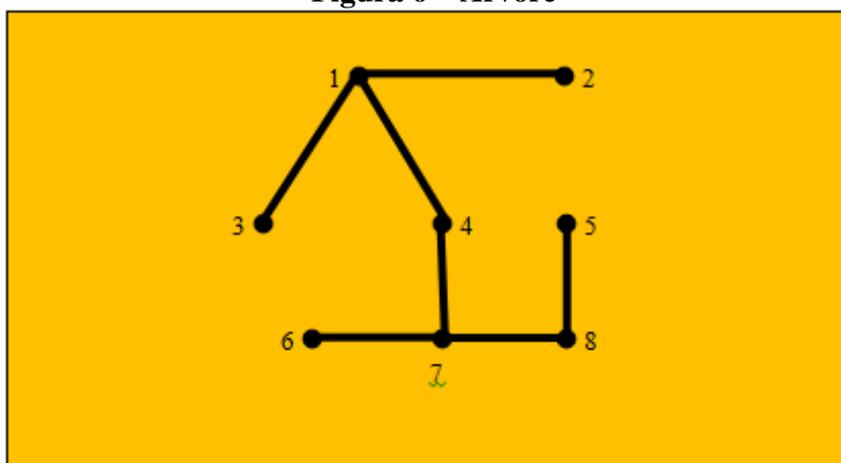
As árvores servem para modelar situações interessantes como a da Figura 7, que representa o desmembramento do município de Teófilo Otoni, de 1878 à data atual, elaborado por Leônidas C. Barroso e Thiago Cisalpino Pinheiro. (MIRANDA, 2007).

Figura 5 – Caminho mínimo entre 1 e 15



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6 – Árvore



Fonte: Elaborada pela autora

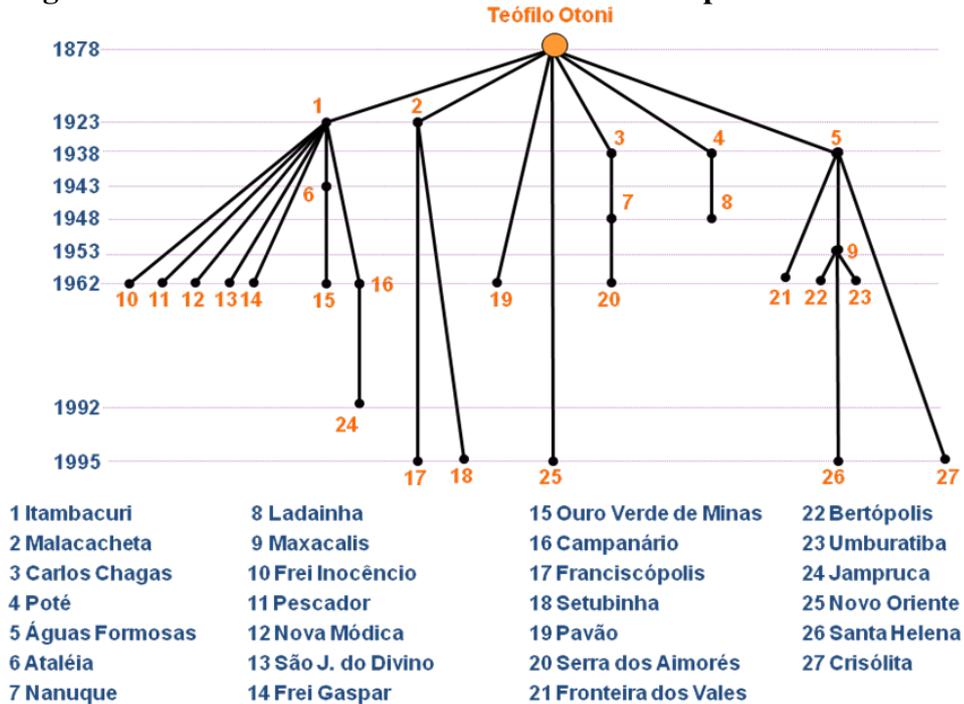
3.1 Árvore Geradora Mínima

Se $G(V, E)$ é um grafo conexo, todo subgrafo conexo e acíclico de G , contendo, como conjunto de vértices, o conjunto V , é uma árvore geradora de G . A árvore geradora mínima é aquela cuja soma dos valores de suas arestas é a menor possível, dentre todas as possibilidades.

Existem algoritmos eficientes que determinam uma árvore geradora mínima de um grafo, dentre eles pode-se citar o algoritmo de Kruskal (DEO, 1974, p. 62), que está descrito, a seguir, como Algoritmo 2. A sua complexidade é $O(n^2)$.

Seja o grafo conexo, valorado, $G(V, E)$ da Figura 4, cujo conjunto de vértices é $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. A primeira ação do Algoritmo 2 é construir a sequência de arestas de $G : < e_1, e_2, \dots, e_m >$, tal que, seus valores estão em ordem não decres-

Figura 7 – Árvore do desmembramento do Município de Teófilo Otoni



BARROSO, L. C.; Cisalpino, T. P. - Árvore de Desmembramento do Município de Teófilo Otoni, MG. PPG-TIE/PUC Minas, 2007.

Fonte: (MIRANDA, 2007)

cente, isto é, $e_j \leq e_{j+1}, 1 \leq j \leq m - 1$. Essa sequência encontra-se no Quadro 1.

Algoritmo 2 (Kruskal) – Árvore Geradora Mínima

	Algoritmo 2 (Kruskal) – Árvore Geradora Mínima Determina a árvore geradora mínima de um grafo conexo.
1:	Entrada - Grafo valorado $G(V,E)$, conexo, de n vértices e m arestas, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, E , $\text{valor}(e_j)$ para $1 \leq j \leq m$.
2:	Saída - $T_{\min}(V, E_{T_{\min}})$ Árvore Geradora Mínima de G .
3:	Seja $S = \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle$ a sequência de arestas de G em ordem não decrescente de seus valores, isto é, $\text{valor}(e_j) \leq \text{valor}(e_{j+1})$, para $1 \leq j \leq m-1$.
4:	$E_{T_{\min}} = \emptyset$
5:	Seja $\text{Rótulo}(v_i) = i$, para $1 \leq i \leq n$.
6:	para $j = 1, \dots, m$ faça
7:	$e_j = (v, w)$
8:	se $\text{Rótulo}(v) \neq \text{Rótulo}(w)$ então
9:	$L \leftarrow \min \{ \text{Rótulo}(v), \text{Rótulo}(w) \}$
10:	para todo $k \in V - \{v, w\}$ faça
11:	se $\text{Rótulo}(k) = \text{Rótulo}(v) \vee \text{Rótulo}(k) = \text{Rótulo}(w)$ então
12:	$\text{Rótulo}(k) \leftarrow L$
13:	fimse
14:	fimpara
15:	$\text{Rótulo}(v) \leftarrow L$
16:	$\text{Rótulo}(w) \leftarrow L$
17:	$E_{T_{\min}} \leftarrow E_{T_{\min}} \cup \{(v, w)\}$
18:	fimpara
19:	Imprima $T_{\min}(V, E_{T_{\min}})$
20:	fimalgoritmo

Fonte: (DEO, 1974, p.62)

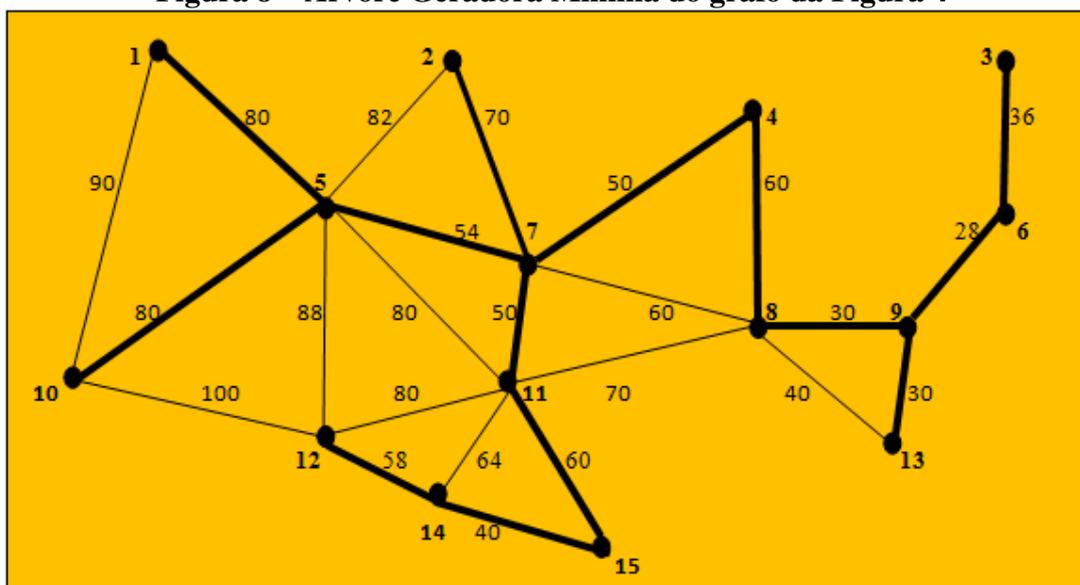
Quadro 1 - arestas e respectivos valores do Grafo G(V,E) da Figura 4

ordem	aresta	valor	ordem	aresta	valor	ordem	aresta	valor
e_1	(6,9)	28	e_9	(5,7)	54	e_{17}	(1,5)	80
e_2	(8,9)	30	e_{10}	(12,14)	58	e_{18}	(11,12)	80
e_3	(9,13)	30	e_{11}	(4,8)	60	e_{19}	(5,10)	80
e_4	(3,6)	36	e_{12}	(7,8)	60	e_{20}	(5,11)	80
e_5	(14,15)	40	e_{13}	(11,15)	60	e_{21}	(2,5)	82
e_6	(8,13)	40	e_{14}	(11,14)	64	e_{22}	(5,12)	88
e_7	(4,7)	50	e_{15}	(2,7)	70	e_{23}	(1,10)	90
e_8	(7,11)	50	e_{16}	(8,11)	70	e_{24}	(10,12)	100

Observa-se que, inicialmente, o conjunto de arestas da árvore geradora mínima é vazio e considera-se os n vértices como pertencentes a componentes diferentes. Escolhe-se um elemento da sequência de arestas. Se os seus extremos estiverem em componentes diferentes, aceita-se a aresta como da árvore, caso contrário, descarta-a. Repete-se o processo até que todos os vértices pertençam a um mesmo componente, obtendo, assim uma árvore geradora mínima de G .

O Quadro 2 registra os valores dos rótulos dos vértices com a inserção das arestas, conforme a ordem estabelecida. Deve-se notar que na 18.^a iteração, com a inserção da aresta (5,10), um único componente é determinado, e, a partir daí, o algoritmo poderia ter sido encerrado já que a árvore geradora mínima já havia sido encontrada. O custo da árvore encontrada é a soma dos valores de suas arestas. Portanto $Custo(T_{min}) = 726$. A árvore Geradora Mínima pode ser vista na Figura 8.

Figura 8 – Árvore Geradora Mínima do grafo da Figura 4



Fonte: Elaborada pela autora

Quadro 2 – Construção da Árvore Geradora Mínima pelo Algoritmo de Kruskal

aresta	Vértices/Rótulos															E_T	C
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$E_T = \emptyset$	0
(6,9)	1	2	3	4	5	6	7	8	6	10	11	12	13	14	15	$E_T = E_T$ $\cup\{(6, 9)\}$	28
(8,9)	1	2	3	4	5	6	7	6	6	10	11	12	13	14	15	$E_T = E_T$ $\cup\{(8, 9)\}$	58
(9,13)	1	2	3	4	5	6	7	6	6	10	11	12	6	14	15	$E_T = E_T$ $\cup\{(9, 13)\}$	88
(3,6)	1	2	3	4	5	3	7	3	3	10	11	12	3	14	15	$E_T = E_T$ $\cup\{(3, 6)\}$	124
(14,15)	1	2	3	4	5	3	7	3	3	10	11	12	3	14	14	$E_T = E_T$ $\cup\{(14, 15)\}$	164
(8,13)	1	2	3	4	5	3	7	3	3	10	11	12	3	14	14	$E_T = E_T$	164
(4,7)	1	2	3	4	5	3	4	3	3	10	11	12	3	14	14	$E_T = E_T$ $\cup\{(4, 7)\}$	214
(7,11)	1	2	3	4	5	3	4	3	3	10	11	12	3	14	14	$E_T = E_T$ $\cup\{(7, 11)\}$	264
(5,7)	1	2	3	4	4	3	4	3	3	10	4	12	3	14	14	$E_T = E_T$ $\cup\{(5, 7)\}$	318
(12,14)	1	2	3	4	4	3	4	3	3	10	4	12	3	12	12	$E_T = E_T$ $\cup\{(12, 14)\}$	376
(4,8)	1	2	3	3	3	3	3	3	3	10	3	12	3	12	12	$E_T = E_T$ $\cup\{(4, 8)\}$	436
(7,8)	1	2	3	3	3	3	3	3	3	10	3	12	3	12	12	$E_T = E_T$	436
(11,15)	1	2	3	3	3	3	3	3	3	10	3	3	3	3	3	$E_T = E_T$ $\cup\{(11, 15)\}$	496
(11,14)	1	2	3	3	3	3	3	3	3	10	3	3	3	3	3	$E_T = E_T$	496
(2,7)	1	2	2	2	2	2	2	2	2	10	2	2	2	2	2	$E_T = E_T$ $\cup\{(2, 7)\}$	566
(8,11)	1	2	2	2	2	2	2	2	2	10	2	2	2	2	2	$E_T = E_T$	566
(1,5)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1	$E_T = E_T$ $\cup\{(2, 7)\}$	646
(11,12)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1	$E_T = E_T$	646
(5,10)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$E_T = E_T$ $\cup\{(5, 10)\}$	726
(5,11)																$E_T = E_T$	726
(2,5)																	
(5,12)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
(1,10)																	
(10,12)																	

3.2 Árvore de Steiner

Dado um Grafo $G(V, E)$, sendo o conjunto V dividido em dois subconjuntos V_1 e V_2 , tais que, $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, denomina-se Árvore de Steiner à árvore mínima que conecta todos os vértices de V_1 , podendo-se utilizar vértices de V_2 para encontrá-la. Estes vértices, se usados, são chamados vértices de Steiner. Interessante dizer que se $V_2 = \emptyset$, então a Árvore de Steiner é a árvore geradora mínima de G , ou se a cardinalidade de V_1 for igual a 2, a Árvore de Steiner é o caminho mínimo entre os dois vértices de V_1 . Ambas as situações podem ser resolvidas em tempo polinomial. Todavia, se $V_2 \neq \emptyset$ e a cardinalidade de $V_1 > 2$, o problema é NP-Completo, conforme demonstra Karp (1972, *apud* MACULAN 1987, p. 188).

O Problema de Steiner Euclidiano foi proposto por Fermat (1601-1665)². Seu enunciado pedia para se encontrar um ponto em um plano cuja soma das distâncias entre ele e três outros pontos do plano fosse mínima. Torricelli (1608-1647)² em 1640 apresentou uma solução geométrica para o problema.

O ponto encontrado por Torricelli pode ser obtido pela interseção de três circunferências, as quais circunscrevem três triângulos equiláteros, formados externamente a cada lado do triângulo construído com os três pontos dados como vértices (FORTE, 2010, p. 3).

Em 1834, Hinen reformula a solução do Problema de Fermat:

Se um dos ângulos do triângulo formado pelos pontos dados for maior ou igual a 120° , o ponto que minimiza a distância é o vértice desse ângulo, caso contrário a solução é o ponto de Torricelli (FORTE, 2010, p. 4).

Maculan (1987) apresenta formulações para a resolução do problema de Steiner para grafos usando Programação Inteira e algoritmos associados.

Encontra-se em Lawler (1976, p. 290-294) o Algoritmo 3 que determina a Árvore de Steiner de um grafo $G(V_1 \cup V_2, E)$. Para o desenvolvimento do algoritmo, Lawler parte de uma situação em que os valores das arestas satisfazem à desigualdade triangular: $a_{ij} \geq 0$ e $a_{ij} \leq a_{ik} + a_{kj}, \forall i, j, k$. Nesse caso existe uma Árvore de Steiner com no máximo $n_1 - 2$ vértices Steiner. A prova desta afirmação parte do princípio que o número de arestas da Árvore Steiner de G com p vértices Steiner deve ser no máximo $n_1 + p - 1$. Além disso, sejam x e y , respectivamente, os números médios de arestas da árvore que incidem nos vértices pertencentes a V_1 e nos vértices de Steiner, então:

$$n_1 + p - 1 = \frac{xn_1 + yp}{2}$$

Como a desigualdade triangular é satisfeita, então: $x \geq 1$ e $y \geq 3$. Assim,

$$n_1 + p - 1 \geq \frac{n_1 + 3p}{2} \Rightarrow p \leq n_1 - 2.$$

²Segundo Boyer (1974).

Algoritmo 3 – Determina a Árvore de Steiner**Algoritmo 3 – Determina a Árvore de Steiner – Lawler (1976, p. 292-293)**

Passo 1 – Constrói-se um novo Grafo $G'(V', E')$, completo, isto é um grafo simples com todas as possíveis arestas, onde $V' = V = V_1 \cup V_2$ e $E' = \{(v, w), \forall v, w \in V'\}$, sendo c_{vw} = custo do caminho mínimo entre v e $w = d(v, w)$. Nesse grafo a desigualdade triangular é satisfeita. Armazenam-se os vértices que compõem esses caminhos mínimos para posterior construção da Árvore de Steiner.

Passo 2 – Os vértices de V_1 devem pertencer à árvore procurada e todos os vértices de V_2 são candidatos a vértices de Steiner. Assim, são considerados todos os subgrafos de G' , induzidos pelos vértices de $V_1 \cup S$, onde

S é cada um dos subconjuntos de V_2 com $n_1 - 2$, ou menos, vértices. Avaliam-se, portanto, $\sum_{i=0}^{n_1-2} \binom{n_2}{i} \leq 2^{n_2}$

subgrafos. E, para cada um deles, determina-se a árvore geradora mínima, escolhendo-se a de menor custo, dentre todas as possibilidades.

Passo 3 – A partir da árvore encontrada no passo anterior, reconstitui-se a árvore de Steiner, utilizando os vértices armazenados no Passo 1.

Fim algoritmo

Fonte: (LAWLER, 1976, p. 292-293)

O Algoritmo 3 é polinomial em n_1 e exponencial em relação a n_2 , já que ele é $O(n_1 + n_2)^3$ no passo 1, $O(n_1^2 2^{n_2})$ no passo 2. Algoritmos heurísticos que dão uma solução aproximada podem ser encontrados em (GOLDBARG; LUNA, 2000). Maculan (1987) apresenta um texto de referência sobre o Problema da Árvore de Steiner em Grafos.

A Figura 9(a) mostra o grafo $G(V_1 \cup V_2, E)$, onde os vértices são representados por círculos: os de V_1 , coloridos de preto e os de V_2 , de branco. Assim: $V_1 = \{1, 2, 4\}$ e $V_2 = \{3, 5, 6\}$.

A Matriz de Adjacências de um grafo $A_{n \times n}$, é aquela cujo elemento a_{ij} indica a existência (= 1) ou não (= 0) de arestas entre os vértices i e j .

$$A_{ij} = 1, \text{ para } (i, j) \in E$$

$$= 0, \text{ em caso contrário}$$

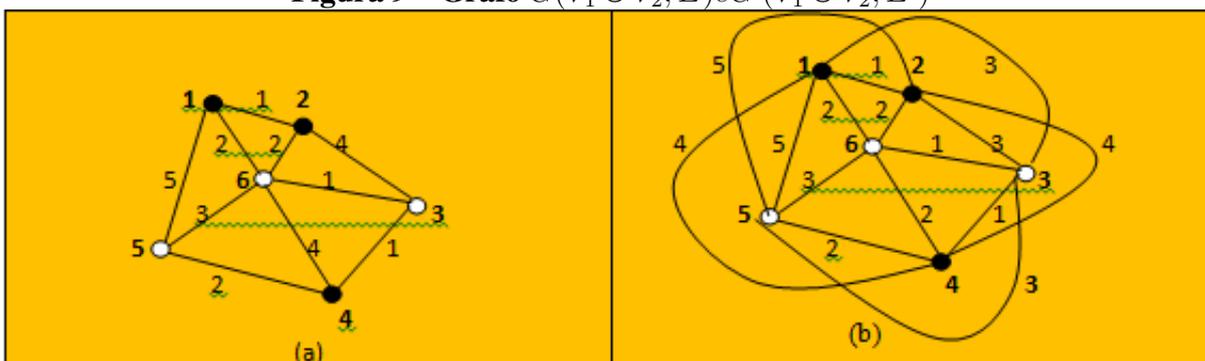
Já a Matriz de Valores contém dados quantificados, ou seja:

$$M_{ij} = \text{valor}(i, j), \text{ para } (i, j) \in E$$

$$= 0, \text{ se } i = j$$

$$= \infty, \text{ em caso contrário}$$

Figura 9 – Grafo $G(V_1 \cup V_2, E)$ e $G'(V_1 \cup V_2, E')$



Fonte: Elaborada pela autora

A Matriz de Valores do grafo G da Figura 9(a) é:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 4 & 0 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Pode-se verificar que os elementos de M não satisfazem a desigualdade triangular. O passo 1 do Algoritmo 3, solicita a determinação da Matriz de Distâncias D , cujos elementos satisfazem a desigualdade triangular. Essa matriz é obtida ao aplicar uma variação do Algoritmo 2 da Seção 2.1, que determina o caminho mínimo entre um vértice e todos os demais. Basta aplicá-lo n vezes.

D é a Matriz de Valores do grafo completo G' de 6 vértices, onde o custo da aresta (v, w) é $d(v, w)$ e R é a matriz, cujo elemento r_{ij} armazena o último vértice do menor caminho entre i e j no grafo original. A Figura 9(b) mostra o grafo $G'(V_1 \cup V_2, E')$.

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

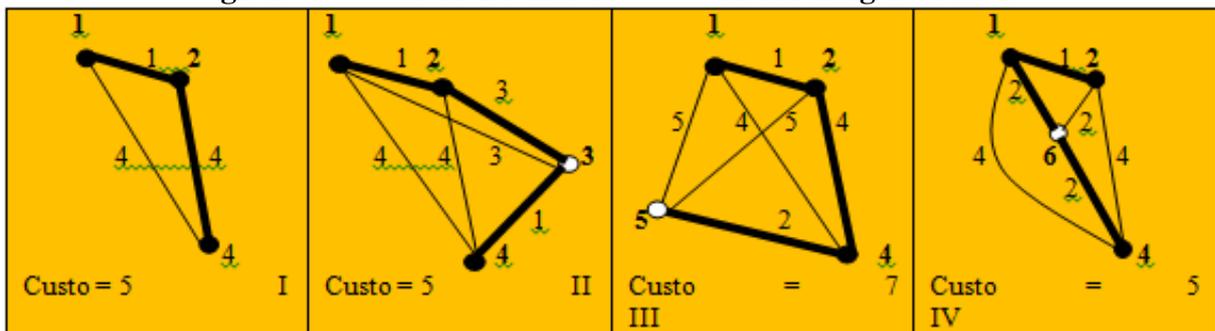
Sendo $V_1 = \{1, 2, 4\}$ e sendo $n_1 = 3$, devem ser considerados as partes de V_2 com até $n_1 - 2 = 1$ elementos. Sendo $V_2 = \{3, 5, 6\}$, o conjunto das partes de V_2 a considerar são: $\{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{6\}\}$.

Assim deve-se considerar os subgrafos de G' , induzidos pelos seguintes vértices:

- $V_1 \cup \emptyset = \{1, 2, 4\}$;
- $V_1 \cup \{3\} = \{1, 2, 4, 3\}$;
- $V_1 \cup \{5\} = \{1, 2, 4, 5\}$;
- $V_1 \cup \{6\} = \{1, 2, 4, 6\}$.

Em seguida, determinar para cada um deles a Árvore Geradora Mínima (Figura 10), aplicando o Algoritmo 2 e, finalmente, encontrar a de menor custo.

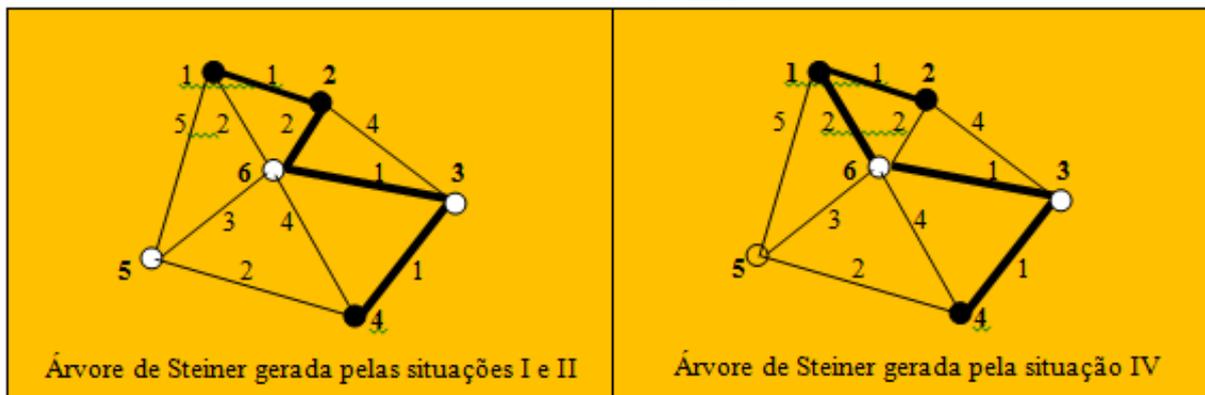
Figura 10 – Árvores Geradoras Mínimas dos subgrafos de G'



Fonte: Elaborada pela autora

Foram encontradas três árvores geradoras mínimas, de custo 5. Utilizando a Matriz R , pode-se reconstruir os caminhos mínimos, para se obter as Árvore de Steiner que conectam todos os vértices de V_1 de menor custo, que estão representadas na Figura 11 e os vértices brancos são os vértices de Steiner. Observe-se que na situação III, o vértice 5 é uma folha da árvore, tornando-se desnecessário. Portanto, ele pode ser excluído, recaindo no caso I. Nas duas soluções, a Árvore de Steiner que conecta os vértices $\{1, 2, 4\}$ contém os vértices 3 e 6, que são os vértices de Steiner.

Figura 11 – Árvores de Steiner do grafo da Figura 8. Em ambas, 3 e 6 são vértices de Steiner



Fonte: Elaborada pela autora

4 APLICAÇÃO

Muitos problemas podem ser modelados por um grafo e sua solução requer a determinação de uma Árvore de Steiner. Goldbarg e Luna (2000, p. 303) destacam:

- Redes de comunicação e tráfego
- Projeto de circuitos eletrônicos e VLSI
- Tubulações de gás e óleo
- Distribuição de água para irrigação e redes de drenagem
- Projetos de instalações elétricas e mecânicas.

A aplicação que é estudada, neste texto, se refere à rede de estradas rodoviárias. Seja um conjunto de cidades de uma região e o conjunto de estradas que as interligam, determinar as vias a serem asfaltadas de modo que todas as cidades estejam ligadas por estradas asfaltadas e o custo total da obra seja mínimo.

É claro que vários fatores são responsáveis para a análise do custo de uma rodovia, conforme consta em (BRASIL, 1999) e, por esta razão vários estudos devem ser realizados:

- | | |
|---------------------|-----------------|
| • Cartográficos; | • Geológicos; |
| • De Drenagem; | • Geométricos; |
| • De Terraplanagem; | • Geotécnicos; |
| • De Tráfego; | • Hidrológicos; |
| • Do Traçado; | • Topográficos. |

Além disso, deve-se considerar:

- Área a ser desapropriada;
- Extensão da pavimentação asfáltica.

Com estes levantamentos os especialistas estipulam os custos das rodovias. Esta tarefa cabe a uma equipe multidisciplinar de vários setores de Engenharia, Geógrafos, Geólogos, Administração, entre outros. Os profissionais de Ciência da Computação recebendo as possíveis estradas a serem asfaltadas, com seus custos e as cidades beneficiadas, devem iniciar os trabalhos fazendo a análise e a modelagem da situação problema por meio de um grafo.

Estando todos os valores determinados, duas opções devem ser estudadas:

1. Se nenhuma estrada da região for asfaltada, então o grafo que representa a situação problema tem como conjunto de vértices, as cidades e os pontos intermediários e como conjunto de arestas as vias que os interligam e seus respectivos custos.
2. Se existirem algumas estradas já asfaltadas, então após a modelagem citada no caso 1, considera-se o grafo resultante após a fusão dos vértices, que já estão interligados por estradas asfaltadas. Em seguida, excluem-se os laços e dentre as arestas paralelas, selecionem aquelas de menor custo, eliminando-se as demais, para obter um novo grafo que representa a situação problema.

Nos dois casos deve-se determinar um subgrafo conexo e acíclico de custo mínimo contendo todos os vértices representantes das cidades beneficiadas, sendo, portanto, uma Árvore de Steiner.

4.1 Caso 1

Considere a Figura 4, que mostra o grafo G , contendo as cidades como conjunto de vértices e o conjunto de arestas relacionado às estradas de terra existentes.

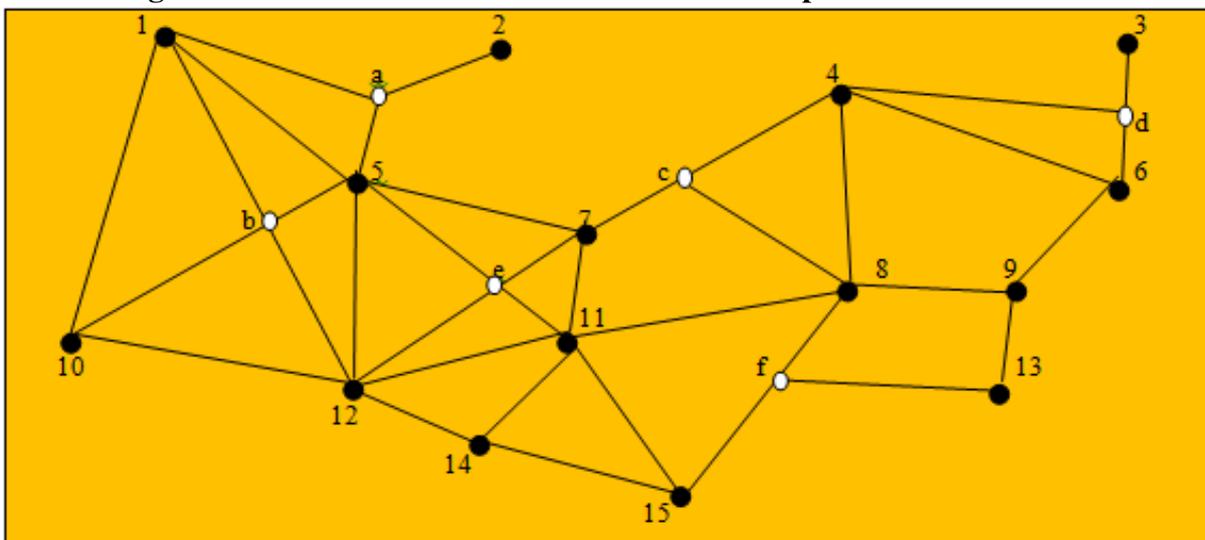
Deve-se observar que todas as estradas têm como extremos duas cidades, não tendo pontos intermediários.

Neste caso, a Árvore de Steiner é a Árvore Geradora Mínima do Grafo da Figura 8, de custo 726, encontrada pelo algoritmo de Kruskal na seção 3.1.

Tendo este mesmo grafo como a situação problema e for solicitado o asfaltamento de estradas apenas entre duas das cidades, tais como a cidade 1 e a 15, então o problema passa a ser a determinação do caminho mínimo entre os vértices 1 e 15, que também já foi solucionado na Seção 2.1 (Figura 5), aplicando o Algoritmo de Dijkstra com o custo de 220 e tendo 5 e 11 como vértices de Steiner.

Continuando o estudo do caso 1, observe a Figura 12, onde algumas das estradas não ligam diretamente duas cidades, isto é, existem vértices intermediários: $\{a, b, c, d, e, f\}$.

Figura 12 – Grafo com uma rede de estradas com pontos intermediários



Fonte: Elaborada pela autora

Deve-se observar na Figura 12 que os vértices a e d são pontos de articulação do grafo, já que a exclusão de qualquer deles desconecta a rede. Então tais pontos devem, obrigatoriamente, pertencer à solução do problema. Portanto, existem os conjuntos: $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d\}$ e $V_2 = \{b, c, e, f\}$, sendo o segundo formado pelos candidatos a vértices Steiner. Como $n_1 - 1 > 2^{n_2}$, deve-se determinar as 2^4 árvores geradoras da forma descrita na Seção 3.2 para a determinação de uma Árvore Steiner, já que existem 16 subconjuntos de $\{b, c, e, f\}$.

Utilizando-se os custos das arestas, determina-se a Matriz de Valores M , 21×21 . Os vinte e um vértices correspondem aos quinze que representam as cidades, mais seis, dos pontos intermediários. Em seguida, determinam-se as matrizes D e R do grafo de 21 vértices para que sejam encontradas as 16 árvores geradoras de seus subgrafos induzidos pelos conjuntos de vértices:

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d\}$;
2. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, b\}$;
3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, c\}$;
4. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, e\}$;
5. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, f\}$;
6. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, b, c\}$;
7. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, b, c\}$;

8. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, b, c\}$;
9. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, c, e\}$;
10. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, c, f\}$;
11. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, e, f\}$;
12. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, b, c, e\}$;
13. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, b, c, f\}$;
14. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, b, e, f\}$;
15. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, c, e, f\}$;
16. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a, d, b, c, e, f\}$.

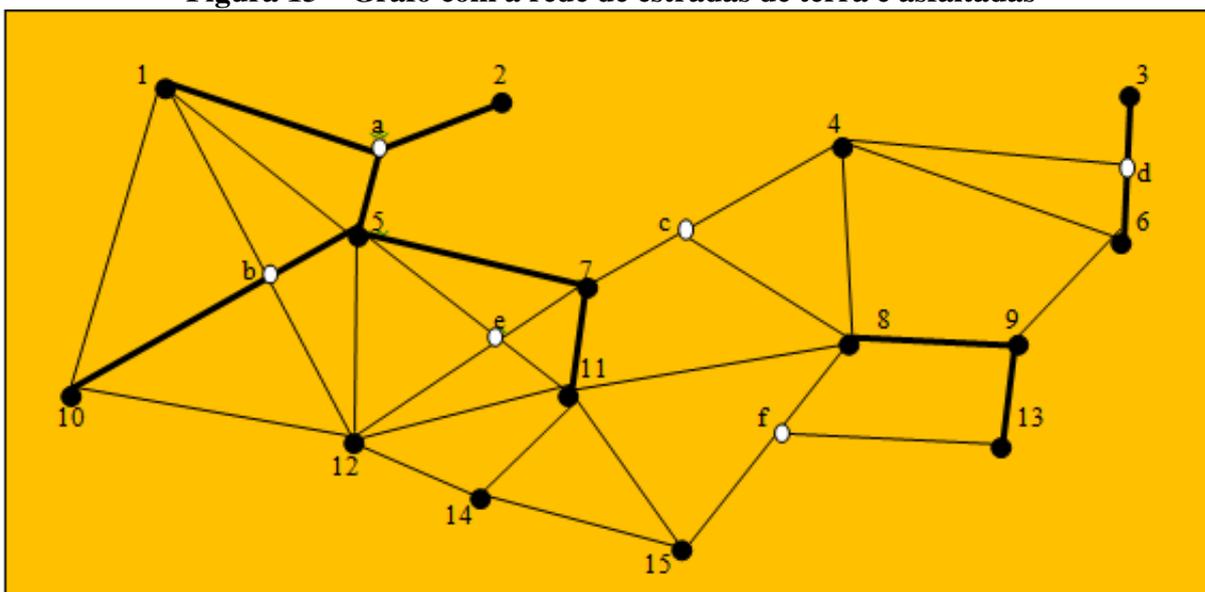
Em seguida, determinam-se as árvores geradoras mínimas de todos os subgrafos e, dentre elas, escolhe-se a de custo mínimo. Para concluir, identificam-se todos os vértices que compõem a *Árvore de Steiner*, reconstruindo os caminhos mínimos, lembrando que se algum dos pontos intermediários for uma folha, este pode ser excluído, juntamente com o valor de sua aresta.

4.2 Caso 2

Para estudar esta situação, deve-se apresentar os trechos de estradas que já se encontram asfaltadas, como mostra a Figura 13. As estradas asfaltadas estão representadas pelas arestas com linhas de maior espessura.

Neste caso, deve-se fazer a fusão de vértices que estão ligados por estradas asfaltadas. Do grafo resultante, os laços são excluídos por não terem significação alguma na solução do problema e, das arestas paralelas, deve ser deixada apenas a cópia de menor valor. O grafo da Figura 14 representa a situação problema.

Figura 13 – Grafo com a rede de estradas de terra e asfaltadas



Fonte: Elaborada pela autora

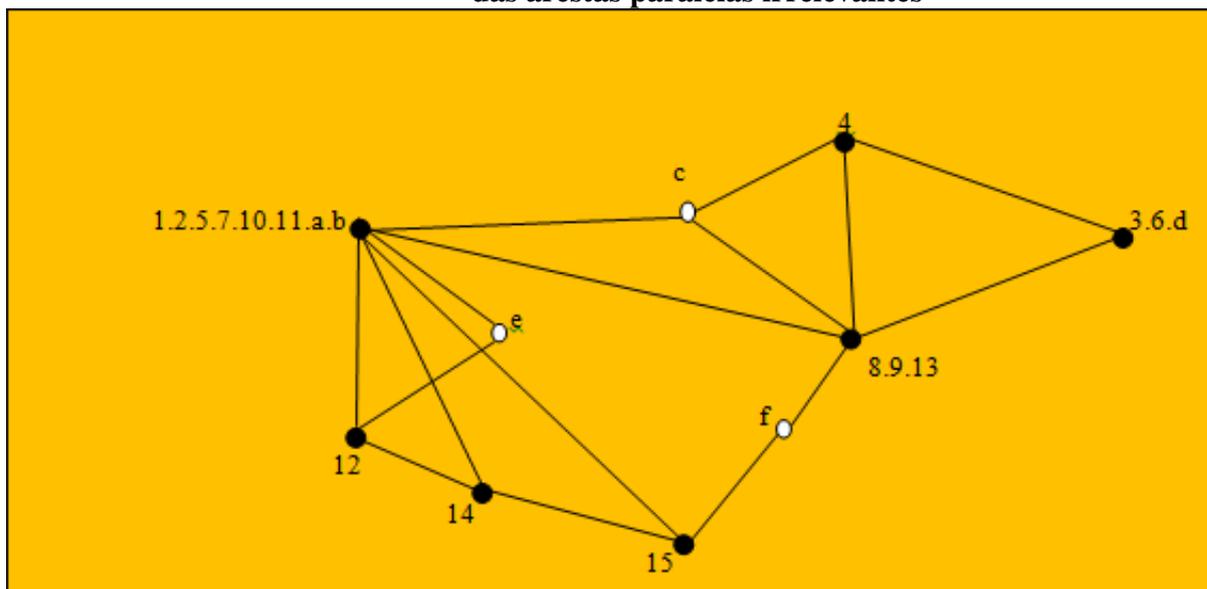
Tabela 3 – Custos das arestas do grafo da Figura 14

Aresta	Custo da aresta
(1.2.5.7.10.11.a.b,c)	(7,c)
(1.2.5.7.10.11.a.b,e)	min(5,e),(7,e),(11,e)
(1.2.5.7.10.11.a.b,12)	min(12,5),(12,10),(12,11),(12,b)
(1.2.5.7.10.11.a.b,14)	(11,14)
(1.2.5.7.10.11.a.b,15)	(11,15)
(1.2.5.7.10.11.a.b,8.9.13)	(11,8)
(12,14)	(12,14)
(12,e)	(12,e)
(14,15)	(14,15)
(15,f)	(15,f)
(4,c)	(4,c)
(8.9.13,c)	(8,c)
(8.9.13,4)	(8,4)
(8.9.13,3.6.d)	(6,9)
(8.9.13,f)	min(8,f),(13,f)
(4,3.6.d)	min(4,d),(4,6)

Fonte: Dados da pesquisa

Como se pode observar no novo grafo não há ponto de articulação, então deve-se determinar a Árvore Steiner interligando o conjunto de vértices $V_1 = \{1.2.5.7.10.11.a.b, 4, 3.6.d, 8.9.13, 12, 14, 15\}$ e os vértices de $V_2 = \{c, e, f\}$, como candidatos a vértices Steiner. O problema recai no caso 1, anteriormente estudado.

Figura 14 – Grafo da Figura 13 após a fusão dos vértices indicados, exclusão dos laços e das arestas paralelas irrelevantes



Fonte: Elaborada pela autora

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foi apresentada uma aplicação da Teoria dos Grafos: a determinação da Árvore de Steiner para encontrar a rede mínima de estradas a ser asfaltada de modo que as cidades do conjunto V_1 sejam interligadas pelas rodovias, utilizando-se, se necessário, vértices de outro conjunto V_2 . Foram estudadas situações em que: (a) $V_2 = \emptyset$ e o problema recai na determinação da árvore geradora mínima; (b) $|V_1| = 2$, cuja solução é o caminho mínimo entre seus vértices; (c) outras, em que alguns vértices de V_2 são necessários. Nesse caso, foram ainda analisadas situações em que há articulações em V_2 , nas quais tais vértices devem ser transferidos para V_1 e em redes que já possuem trechos de estradas asfaltadas, onde torna-se necessária a fusão de alguns deles para que o problema recaia em casos anteriormente estudados.

A teoria necessária para o entendimento da solução do problema é mostrada, bem como são apresentados os algoritmos utilizados. Evidentemente, o estudo da modelagem apresentada pode servir de apoio à decisão de serviços públicos ou privados na duplicação de uma rede rodoviária ou na construção de estradas asfaltadas, conectando distritos ainda ligados por estradas de terra, além da pesquisa preliminar que subsidia a instalação de novas cidades.

O problema proposto está inserido em outro mais amplo, que objetiva o planejamento e a execução do asfaltamento de uma dada rede rodoviária. Devido sua complexidade, atuam, na solução, profissionais de distintas áreas do conhecimento, colocando-o na seara da multidisciplinaridade. Matemáticos e Cientistas da Computação ao participarem da engrenagem desse processo, tornam-se parte do todo, portanto, indispensáveis para se ter a totalidade.

Este trabalho começou com imagens e o que delas pode ser extraído. Manoel de Barros, poeta mato-grossense, diz no documentário “Só dez por cento é mentira: uma biografia

inventada de Manoel de Barros” (CEZAR, 2008) que uma garota de Brasília, ao ver uma bela imagem, traduziu em palavras: “Borboleta é uma cor que avoa”. E o leitor, se sente livre para contemplar o que há além das imagens, quando está diante de uma janela fixa ou móvel?

AGRADECIMENTOS

A autora agradece aos professores da PUC Minas Bernardo Jeunon Alencar, Leônidas Barroso e Lucila Ishitani pela motivação para desenvolver este artigo.

REFERÊNCIAS

- ADOROCINEMA. **Moça com brinco de pérola**. Peter Webber (Diretor), Lions Gate Films Inc.; Pathé (Produção). Reino Unido, Luxemburgo, EE.UU: França (Nacionalidade). 2003. Lançamento, 2004. Disponível em: <www.adorocinema.com/filmes/filme-45323> Acesso em: 17 fev. 2014.
- ASSIS, L. J. **Localização de Escolas Públicas em Betim**. 2001. Dissertação (Mestrado em Tratamento da Informação Espacial) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, PUC Minas, 2001.
- ASSIS, L. J.; BARROSO, M. M. A.; ABREU, J. F. Distribuição espacial de escolas municipais em betim. In: JOÃO FRANCISCO DE ABREU; LEÔNIDAS CONCEIÇÃO BARROSO. (ORG.). **Geografia, Modelos de Análise Espacial e GIS**. Belo Horizonte: Editora PUCMINAS, 2003. p. 63–86.
- BARROSO, L. C.; BARROSO, M. M. A. Estudo da rede rodoviária da mesorregião do vale do mucuri-mg por meio de teoria dos grafos. In: MEMORIAS DE LA DÉCIMA SEGUNDA CONFERENCIA IBEROAMERICANA EN SISTEMAS, CIBERNÉTICA E INFORMÁTICA (CISCI 2013), 2013, Orlando. **Anais...** Orlando: IIIS, 2013. p. 186–191. ISBN: 978-1-936338-84-9.
- BARROSO, M. M. A. A matemática na limpeza urbana. In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 21, 1998, Caxambu. **Minicurso**. Caxambu: SBMAC, 1998. p. 95.
- BARROSO, M. M. A. Operações elementares em grafos e aplicações. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 7, 2007, Uberlândia. **Minicurso**. Uberlândia: SBMAC - UFU, 2007. p. 28.
- BOAVENTURA-NETTO, P. O. **Grafo: Teoria, Modelos, Algoritmos**: Peter webber (diretor), lions gate films inc.; pathé (produção). São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 405 p.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974. 488 p.
- BRASIL. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem. Diretoria de Desenvolvimento Tecnológico. Divisão de Capacitação Tecnológica. **Diretrizes básicas para elaboração de estudos e projetos rodoviários (escopos básicos/instruções de Serviço)**, Rio de Janeiro, p. 375, 1999.
- CANÇADO, R. D. **Determinação de Redes Atingidas na Interrupção do Abastecimento de Água: desenvolvimento de aplicativo computacional, utilizando GIS e Grafos**. 2000. Dissertação (Mestrado em Tratamento da Informação Espacial) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- CEZAR, P. **Só dez por cento é mentira: uma biografia inventada de Manoel de Barros**. Documentário. Direção: Pedro Cezar. Brasil, 2008.
- CHEVALIER, T. **Moça com brinco de pérola**. Rio Janeiro: Bertrand Brasil, 2002. 239 p.
- DEO, N. **Graph Theory with applications to Engineering and Computer Science**. Englewood Cliffs: Prentice Hall. Inc, 1974. 478 p.

FORTE, V. L. **Algoritmos de Otimização Aplicados ao Problema de Steiner em n dimensões**. 2010. 101 p. Dissertação (Mestrado em Ciência em Engenharia de Sistemas e Computação) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

GIBSON, A. **Algorithmic Graph Theory**. Melbourne: Cambridge Press, 1985. 259 p. ISBN: 0 521 28881 9.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Campus, 2000. 649 p. ISBN: 85-352-0541-1.

HARARY, F. **Graph Theory**. Reading: Addison-Wesley, 1972. 273 p. ISBN 0-201-02787-9.

JABOR, Arnaldo. As meninas, velázquez pinta o espectador. In: _____. **Os Canibais estão na sala de Jantar**. São Paulo: Siciliano, 1993. p. 175–179. Disponível em: <http://www.felu.xpg.com.br/Os_Canibais_Estao_na_Sala_de_Jantar_Arnaldo_Jabor.pdf>. Acesso em: 16 set. 2011.

LAWLER, E. L. **Combinatorial Optimization: networks and matroid**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.

LIMA, M. C. P. B. **Sistema de Informação sobre o itinerário do transporte urbano na região central de Belo Horizonte**. 2001. Dissertação (mestrado em Geografia – Tratamento da Informação Espacial) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

LIMA, M. C. P. B.; BARROSO, M. M. A.; MUZZARELLI, A. A determinação do melhor trajeto entre dois pontos de parada de ônibus, na região central de belo horizonte. In: JOÃO FRANCISCO DE ABREU; LEÔNIDAS CONCEIÇÃO BARROSO. (ORG.). **Geografia, Modelos de Análise Espacial e GIS**. Belo Horizonte: Editora PUCMINAS, 2003. p. 31–62.

MACULAN, N. The steiner problems in graphs. **Annals of Discrete Mathematics**, Elsevier Science Publishers B.V (North-Holland), p. 185–212, 1987.

MANGUEL, Alberto. **Lendo Imagens – uma histórias de amor e ódio**. São Paulo: Companhia das Letras, 2001. 358 p.

MIRANDA, Nilmário. **Teófilo Otoni – A República e Utopia do Mucuri**. São Paulo: Caros Amigos Editora, 2007. 183 p.

SCHENEIDER, N. **Vermeer – A obra completa**. Köln: Taschen, 2001. 96 p. ISBN: 3-8228-0974-8.

SZWARCFITER, J. L. **Grafos e Algoritmos Computacionais**. Rio de Janeiro: Campus, 1984. 216 p. ISBN: 85-7001-138-5.