PUC Minas
A B A K Ó S
Instituto de Ciências Exatas e Informática

Licença Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported

Função de Polya e a Fórmula de Molien*

Polya Function and Molien's Formula

Roberto de Maria Nunes Mendes[1, 2]

Resumo

Neste artigo estendemos a clássica fórmula de Molien, para grupos finitos $\underline{G}$, ao caso em que $\underline{G}$ é um subgrupo fechado do grupo $O(n)$ das transformações ortogonais do R^n, e a aplicamos ao cálculo da função de Polya de $\underline{G}$.

Palavras-chave: Grupo ortogonal. Harmônico esférico. Subgrupo fechado. Invariante.

*Submetido em: 07/10/13 - Aceito em: 07/11/2013

[1]Professor aposentado da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Brasil.
[2]Professor titular da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), Brasil.

Abstract

In this paper we extend the classical Molien's formula for finite groups $\underline{G}$ to the case where $\underline{G}$ is a subgroup subgroup of $O(n)$ (the group of orthogonal transformations of R^n), and apply it on computation of the Polya function of $\underline{G}$.

Keywords: Orthogonal group. Spherical harmonic. Closed subgroup. Invariant.

1 Contextualização do Problema

O estudo dos harmônicos esféricos se justifica pela sua importância e aplicações na Análise, Geometria e Física clássicas. Mais recentemente tais harmônicos mostraram-se úteis no estudo de certos problemas da Mecânica Quântica e da Física de Particulares Elementares.

Seja S^{n-1} a esfera unitária no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, $O(n)$ o grupo ortogonal de $\mathbb{R}^n$, isto é, o grupo das matrizes n x n $\underline{\sigma}$ tais que $\sigma^t = \sigma^{-1}$ (onde σ^t significa a transposta de σ e o $SO(n)$ o subgrupo $O(n)$ formado pelas $\sigma \in O(n)$ tais que $det\sigma = 1$.

<u>Definição:</u> Um harmônico esférico f_k , de grau $\underline{\text{k}}$, é a restrição a S^{n-1} de um polinômio homogêneo $F_k(x)$, de grau $\underline{\text{k}}$, que é harmônico, isto é,

$$\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_1^2} \quad + \ldots + \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_n^2} \; = \; 0.$$

Temos

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad r = \mid x \mid \; = \; \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

e

$$F_k\,(x) \; = r^k \; f_k\,(\frac{x}{r}) \quad para \quad r \neq 0.$$

Vamos representar por H_k o espaço vetorial dos harmônicos esféricos de grau $\underline{k}$, e por $H_k(G)$ o subespaço dos harmônicos esféricos de grau k que são invariantes sob G , isto é,

$$H_k(G) \; = \; \{f_k \; \in \; H_k \,|f_k(\sigma\,\xi) = f_k(\xi) \quad \forall\,\sigma \; \in \; G, \quad \forall\,\xi \; \in \; S^{n-1}\}.$$

Estamos interessados em determinar quando é que $H_k(G) \neq 0$. Para isto estudamos a Função de Polya, $F_G(t)$, definida pela série formal

$$F_G(t) \; = \sum_{k \geq 0} \quad t^k \quad \dim \quad H_k\,(G).$$

<u>Cálculo de $F_G(t)$:</u>

Seja $S = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ a álgebra dos polinômios em $\underline{n}$ variáveis e $S_k = \{p \in S;\ \underline{p}$ é homogêneo de grau $\underline{k}\}$. Então: $S = \oplus_{k \geq 0} S_k$.

Definamos a aplicação $\phi_k : S_k \to H_k$ como se segue. É um resultado clássico Hobson (1931, p. 127) que todo polinômio homogêneo $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ pode ser escrito de modo único como $p = \sum_k (x_1^2 + \ldots x_n^2)^k h_k$, onde h_k é um polinômio homogêneo de grau igual a $(grp - 2k)$, $0 \leq k \leq \frac{grp}{2}$ e $h_\circ$ é harmônico. Definimos

$$\phi_k : p(x) \to h_\circ(\xi), \quad onde \quad \xi = \frac{x}{r}, r = |x| \neq 0$$

<u>Proposição</u>: ϕ_k é uma aplicação linear sobrejetora com núcleo $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)S_{k-2}$. Portanto, temos o isomorfismo

$$H_k \simeq \frac{S_k}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)S_{k-2}}$$

<u>Demonstração</u>:

É claro que ϕ_k é linear. Para ver que ela é sobrejetora, seja $f_k \in H_k$ e F_k o polinômio homogêneo harmônico correspondente, tal que $F_k(x) = r^k f_k(\xi)$, $\xi = \frac{x}{r}$, $r \neq 0$.

Então $\phi_k(F_k) = f_k$, e ϕ_k é sobrejetora.

Agora $\phi_k(p) = 0 \Longleftrightarrow h_\circ(\xi) = 0 \quad \forall\, \xi \in S^{n-1} \Longleftrightarrow h_\circ(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow h_\circ = 0 \Longleftrightarrow p \in (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \quad S_{k-2}$, donde

$$ker\phi_k = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)S_{k-2}.$$

Seja $S_k(G)\,\{p \in S_k |\, p(\sigma x) = p(x) \quad \forall \sigma \in G, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$ e $S(G) = \oplus_{k \geq 0} S_k(G)$; os elementos de $S(G)$ são os polinômios que são invariantes sob G.

<u>Proposição</u>:

$$H_k(G) \text{ é isomorfo a } \frac{S_k(G)}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\, S_{k-2}(G)}$$

<u>Demonstração</u>:

Se $p \in S_k(G)$, então $p(\sigma x) = h_\circ(\sigma x) + r^2 q(\sigma x) = p(x) = h_\circ(x) + r^2 q(x)$. Portanto, $h_\circ(\sigma x) = h_\circ(x), q(\sigma x) = q(x)$, ou seja, $h_\circ(\xi) \in H_k(G)$, $q(x) \in S_{k-2}(G)$ Segue-se que ϕ_k leva $S_k(G)$ em $H_k(G)$ e que $ker\phi_k \mid S_k(G) = S_k(G) \cap ker\phi_k = S_k(G) \cap (x_1^2 + \ldots + x_n^2)\, S_{k-2} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)\, S_{k-2}(G)$.

Agora, se $f_k \in H_K(G)$ e $F_k(x) = r^k f_k(\xi)$, então $f_k(\sigma\xi) = f_k(\xi)$ implica $F_k(\sigma x) = F_k(x)$, donde $F_k \in S_k(G)$ e $\phi_k(F_k) = f_k$ Portanto, ϕ_k leva $S_k(G)$, sobre $H_k(G)$ com núcleo $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)S_{k-2}(G)$ e temos o isomorfismo

$$H_k\,(G) \simeq \frac{S_k\,(G)}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)S_{k-2}(G)}$$

Corolário: $dimH_k\,(G) = dimS_k\,(G)\ -\ dim\ S_{k-2}\,(G)$.

Definição:

A série de Poincaré de $S(G)$ é definida por

$$P_G\,(t)\ =\ \sum_{k\geq\circ} t^k dim\ S_k\,(G).$$

Proposição:

$$F_G\,(t)\ =\ (1-t^2)\ P_G\,(t).$$

Demonstração:

Temos,

$$(1-t^2)\ P_G(t)\ =\ \sum_{k\geq\circ}\ (1-t^2)t^k dimS_k\,(G) =$$

$$=\ \sum_{k\geq\circ}[t^k dimS_k\,(G)\ -\ t^{k+2}dim\ S_k\,(G)] =\ \sum_{k\geq\circ}\ t^k[dimS_k\,(G)\ -\ dimS_{k-2}\,(G)] =$$

$$=\ \sum_{k\geq\circ}\ t^k dimH_k(G)\ =\ F_G(t).$$

Queremos provar a fórmula $P_G\,(t)\ =\ \int_{\sigma\in G}\ \frac{1}{det(1-t\sigma)}d\sigma$ onde $\underline{d\sigma}$ é a medida de Haar normalizada sobre o grupo compacto G, isto é, $\int_G\ d\sigma\ =\ 1$.

O grupo G atua sobre S_k por $\Theta^{(k)} : G\ \to L(S_k, S_k), \Theta_\sigma^{(k)}\,(p_k) = p_k \circ \sigma^t$, $L\,(S_k, S_k)$ sendo o espaço vetorial das aplicações lineares de S_k em S_k.

Lema: (BOURBAKI, 1968)

$$\sum_{k\geq\circ}\ (Tr\ \Theta_\sigma^{(k)}\ )t^k\ \ =\ \ \frac{1}{det(1-t\sigma)}$$

Demonstração:

Podemos supor que o corpo é $\mathbb{C}$ ao invés de $\mathbb{R}$. Escolhamos uma base de $\mathbb{C}^n$ de modo que a matriz de σ: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ seja diagonal,

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} = diag\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Os monômios $m(t) = (t_1^{r_1} \ldots t_n^{r_n})_{r_1+\ldots+r_n=k}$, formam uma base de S_k. Temos

$$\Theta_\sigma^{(k)}(t_1^{r_1} \ldots t_n^{r_n}) = \Theta_\sigma^k(m)(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= m \circ \sigma^t(t_1, \ldots, t_n) = \lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_1^{r_n}\ t_1^{r_1} \ldots t_n^{r_n}.$$

Relativamente à base $(t_1^{r_1} \ldots t_n^{r_n})_{r_1+\ldots+r_n=k}$, na ordem lexicográfica, a matriz de Θ_σ^R é diagonal e seus elementos diagonais são os produtos $\lambda_1^{r_1} \ldots \quad \lambda_n^{r_n}, \ldots$:

$$\Theta_\sigma^{(k)} = diag\ (\lambda_1^{(r_1)} \ldots\ \lambda_n^{r_n}, \ldots)\ .$$

Então,

$$Tr\Theta_\sigma^{(k)} \ = \sum_{r_1+\ldots+r_n=k} \lambda_1^{r_1} \ldots\ \lambda_n^{r_n}$$

e, portanto, temos

$$\sum_{k\geq\circ} (Tr\Theta_\sigma^{(k)})t^k = \sum_{k\geq\circ} \quad \sum_{r_1+\ldots+r_n=k} \quad \lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_1} \quad t_1^{r_1} \ldots t_n^{r_n} =$$

$$= \ (\ \sum_{k\geq\circ} \lambda_1^k t^k) \ldots (\sum_{k\geq\circ}\ \lambda_n^k t^k)\ =\ \frac{1}{1-\lambda_1 t} \cdots\ \frac{1}{1-\lambda_n t}\ =\ \frac{1}{det(1-t\sigma)}$$

<u>Teorema</u>:

$$P_G(t)\ =\ \int_G \frac{1}{det(1-t\sigma)}\ d\sigma$$

<u>Demonstração</u>:

Seja $\Theta^{(k)}\ :\ G\ \to L\ (S_k, S_k),\ \Theta_\sigma^{(k)}\ (p_k)\ =\ p_k \circ \sigma^t.$

Definamos $\qquad I\ =\ \int_G\ \Theta_\sigma^{(k)}\ d\sigma\ .$

Então (ADAMS, 1969, p. 35),

$$I^2 = I,\ Im(I) \ = \ S_k\,(G) \quad e \quad TrI \ = \ \int_G Tr\Theta_\sigma^{(k)}\, d\sigma \ = \ dim\ S_k\,(G).$$

Segue-se que

$$P_G(t) \ = \ \sum_{k\geq\circ} t^k\ dim\ S_k\,(G) \ = \ \sum_{k\geq\circ} (\int_G Tr\ .\ \Theta_\sigma^{(k)}\ d\sigma)\ t^k \ =$$

$$= \int_G (\sum_{k\geq\circ} (Tr\ \Theta_\sigma^{(k)})\ t^k)\ d\sigma \ = \ \int_G \frac{1}{det(1-t\sigma)}\ d\sigma.$$

<u>Corolário</u>:

$$F_G(t) = \int_G \ = \frac{1-t^2}{det(1-t\sigma)}\ d\sigma,\ \text{que é a fórmula de Molien.}$$

<u>Exemplo 1</u>: Se $G = \ \{e\}$, então $H_k(G) = H_k$ e $det(1-te) \ = \ (1-t)^n$ Então,

$$F_G(t) \ = \ \frac{1+t}{(1-t)^{n-1}} \quad = \quad \sum_{k\geq\circ} t^k\ dim\ H_k,$$

e obtemos o resultado clássico (MULLER, 1966, p. 4):

$$dimH_k \ = \ \frac{(n+2k-2)\ (n+k-3)!}{k!\ (n-2)!}$$

No caso particular de $n = 3$, temos: $dim\ H_k \ = \ 2k+1$.

<u>Observação</u>:

Se G é um grupo finito, então:

$$F_G \ = \ \frac{1}{|G|} \quad \sum_{\sigma\in G} \quad \frac{1-t^2}{det(1-t\sigma)} \quad ,$$

onde $|G| \ = \ $ ordem de G .

<u>Exemplo 2</u>:

Se G é um subgrupo fechado de $SO(3)$, podemos escrever $\sigma \in G$ na forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha_\sigma & -sen\alpha_\sigma \\ 0 & +sen\alpha_\sigma & cos\alpha_\sigma \end{bmatrix}$$

e temos a fórmula

$$F_G(t) \ = \ \int_{\sigma\in G} \frac{1+t}{1-2t\ cos\alpha_\sigma \ + \ t^2}\ d\sigma$$

2 Considerações Finais

Polya e Meyer calcularam a função geratriz $F_G(t)$ para os subgrupos finitos de $O(3)$. Seus resultados estão em Polya e Meyer (1950).

O presente autor calculou $F_G(t)$ para os subgrupos fechados de $O(4)$. Seus resultados estão em Mendes (1975).

A ideia da demonstração acima é devido a J. P. Fillmore, a quem agradecemos.

Referências

ADAMS, F. **Lectures on Lie Groups**. Benjamin. 1969.

BOURBAKI N. **Eléments de Mathématique**: Fascicule XXXIV, Groupes el Algèbres de Lie. Act. Scient. Ind. nº 1337, Chap. N, V, VI. Harmann, Paris, 1968. [lema II]

HOBSON, E. W., **The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics**, Cambridge, 1931.

MENDES, R. M. N., Sysmmetries of Spherical Harmonics, **Transactions of the AMS**, Vol. 204, 1975.

MULLER, C., **Spherical Harmonics**. Lecture Notes in Mathematics. nº 17, Springer-Verlag, 1966.

POLYA, G. e MEYER, B., Sur les symmetries des fonctions sphériques de Laplace, **C. R. Acad. Sci.** Paris, nº 228, 1950, 20 – 30.