A B A K Ó S
Instituto de Ciências Exatas e Informática

O Problema da Braquistócrona: uma proposta para o ensino*

The Brachistochrone Problem: a proposal for teaching

Clóvis Güerim Vieira[1]
Ramon Junio Gonçalves Rosa[2]
Wellington Damaceno de Freitas[3]

Resumo

Neste trabalho, será apresentado o problema da determinação da curva descrita por uma partícula que, acelerada unicamente pela ação da força gravitacional, se desloca de um ponto ao outro, no menor tempo possível. O problema será resolvido de duas maneiras distintas. A primeira utiliza o Cálculo das Variações e a segunda, o Princípio de Fermat. A solução para ambos os métodos é a curva cicloide, como será demonstrado. Será apresentado, também, um experimento didático que permite a inclusão desse tema em aulas do ensino médio de forma lúdica, propondo, ao final, um desafio que interliga esse tipo de curva ao cotidiano do aluno.

Palavras-chave: Cálculo Variacional. Braquistócrona. Experimento. Ensino

*Submetido em 04/02/2016 – Aceito em 04/05/2016

[1]Graduado do Curso de Licenciatura em Física da PUC Minas, Brasil – clovisguerim@gmail.com
[2]Graduado do Curso de Licenciatura em Física da PUC Minas, Brasil – ramonjg21@yahoo.com.br
[3]Graduado do Curso de Licenciatura em Física da PUC Minas, Brasil – wellington.serafimfis@gmail.com

Abstract

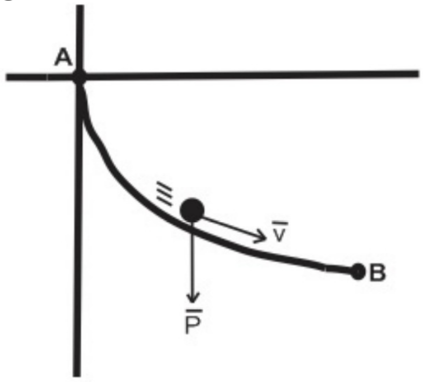
In this paper it will be presented the problem of determination of the curve described by a particle, which accelerated by the action of the gravitational force moves from a point to the other in the shortest time possible. The problem will be solved in two different ways. The first one uses the Calculus of Variations, and the second one, the Fermat's Principle. The solution to both methods is the cycloid curve, as it will be shown. There will also be presented an experiment that allows the inclusion of this subject in high school classes in a playful manner, suggesting, in the end, a challenge that links this kind of curve to the student everyday life.

Keywords: Variational calculus. Brachistochrone . Experiment. Education.

1 INTRODUÇÃO

O problema de determinar a curva que define a trajetória de menor tempo possível para uma partícula que, sujeita unicamente à ação da força gravitacional, abandona um ponto A e atinge um ponto B, como mostra a Figura 1. Foi proposto, inicialmente por Jean Bernoulli, em 1696. Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz, G.F.A. L'Hospital e Jackob Bernoulli são autores de importantes soluções para o problema (BUSTILLOS; SASSINE, 2011). Neste trabalho serão apresentadas duas formas de resolução distintas, a primeira é semelhante a que foi apresentada por Jakob Bernoulli, utilizando o Cálculo das Variações. A segunda diz respeito a resolução de Johan Bernoulli que, basicamente, calculou a curvatura de um raio de luz em um meio não uniforme.

Figura 1 – A curva de menor tempo



Fonte: Elaborada pelos autores

A solução para o problema da curva "braquistócrona" (do latim, menor tempo), em ambos os métodos, é uma função da família das cicloides invertidas. Após a apresentação destas resoluções, serão propostas metodologias para a discussão do problema nas salas de aula do Ensino Médio, utilizando conceitos matemáticos, e um experimento no qual observa-se que, de fato, a cicloide é a curva de menor tempo. Por fim, serão discutidos exemplos de situações cotidianas relacionadas com a curva braquistócrona.

A discussão do problema em nível médio é pertinente, pelo fato de possibilitar a interdisciplinaridade entre a física e a matemática e, também, exigir que o aluno adote uma postura crítica, analisando resultados e aplicando o método científico, uma vez que poderá interagir com o experimento, levantar hipóteses e construir seu conhecimento de forma autônoma.

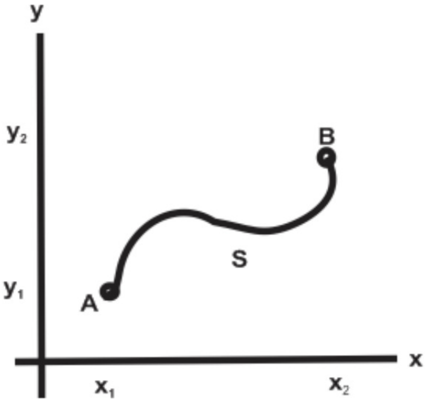
2 O CÁLCULO VARIACIONAL E A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Muitos problemas da física e matemática podem ser solucionados obtendo-se pontos mínimos e/ou máximos de uma função. O problema central do cálculo das variações é, justamente, determinar uma função $y(x)$, com valores fixos em $x = x_1$ e $x = x_2$, que faça o funcional $J[y]$ atingir um valor máximo ou mínimo, dentro desse intervalo. O funcional é definido pela seguinte integral:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)dx$$

O problema da braquistócrona é o de encontrar a curva que faça o funcional tempo $T[y]$ ser o menor possível. Analogamente, existe o problema da menor distância entre dois pontos que é, justamente, o de definir, dado um plano, a curva de menor comprimento entre dois pontos $A(x1, y1)$ e $B(x2, y2)$ em uma trajetória S, como é mostrado na Figura 2. Esse último exemplo pode ser usado para entender melhor qual a ideia por trás do Cálculo das Variações e o conceito de funcional.

Figura 2 – A menor distância entre dois pontos



Fonte: Elaborada pelos autores

A partir da curva S, pode-se escrever o comprimento infinitesimal dS como:

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

O funcional $S[y]$ é obtido ao integrar a função $dS(x, y')$, evidenciando $(dx)^2$, no intervalo desejado. $S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y)^2}dx$, onde y' é a derivada em relação à x. A partir desse funcional, deseja-se encontrar uma função dentro do intervalo $[x1, x2]$ que garantirá, dimensionalmente, o menor comprimento possível para S e será obtida resolvendo a equação de Euler-Lagrange.

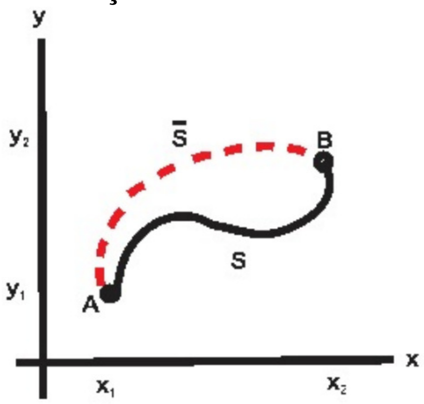
2.1 Resolução para o problema da menor distância entre dois pontos

O que caracteriza os máximos e mínimos de qualquer função é que, para um deslocamento mínimo em relação aos extremos, a derivada de primeira ordem não muda. A ideia adotada no cálculo variacional é análoga, para uma variação infinitesimal de trajetória, o funcional $S[y]$ deve ser constante.

O problema da menor distância entre dois pontos, mencionado anteriormente, pode ser resolvido utilizando o Cálculo das Variações. Para determinar a curva S de comprimento mínimo será de grande ajuda construir, entre os pontos A e B, uma curva $\bar{S}$, como é mostrado na Figura 3, que tornará mínimo o valor do funcional $J[\alpha]$ que será usado para determinar a

Equação de Euler-Lagrange e, depois, substituído pelo funcional $S[y]$ que derivará a solução para o problema.

Figura 3 – Funções com extremos coincidentes



Fonte: Elaborada pelos autores

Como é de interesse somente o intervalo analisado, uma expressão possível para a nova curva é $\bar{y}(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, onde $\bar{y}$ é o valor da curva $\bar{S}, \forall\ x \in [x_1, x_2], \alpha \in \mathbb{R}$ e $\eta(x)$ é uma função que se anula nos pontos de intersecção das duas curvas.

Como mencionado anteriormente, o problema pode ser solucionado resolvendo-se a Equação de Euler-Lagrange, que será formalizada nessa subseção. Para isso, considere o funcional $J[\alpha] = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(\bar{y}, \bar{y}', x)dx$. Como no limite do intervalo existe a condição em que a derivada de $J[\alpha]$ é nula $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$ (quando $\alpha = 0$). Como o termo α está embutido somente em $\bar{y}$ e $\bar{y}'$, pode-se, utilizando a regra da cadeia, derivar a função dentro da integral:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\bar{y}}\frac{d\bar{y}}{d\alpha} + \frac{df}{d\bar{y}'}\frac{d\bar{y}'}{d\alpha}dx$$

Nos limites do intervalo, $\alpha = 0$ e o termo $\frac{d\bar{y}}{d\alpha} = \eta(x)$. A integral pode ser reescrita como $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dy}\eta(x) + \frac{df}{dy'}\eta(x)'dx = 0$, integrando por partes o segundo termo, e tomando os limites de integração teremos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dy'}\eta(x)'dx = \frac{df}{dy'}\eta(x) - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{df}{dy'}dx$$

Nas extremidades do intervalo, $\frac{df}{dy'}\eta(x) = 0$ e a integral se reduz à, simplesmente, $\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{df}{dy'}dx$. Como essa relação é válida para qualquer $\eta(x) \in \mathbb{R}$, obtém-se a equação de Euler-Lagrange que, basicamente verifica, entre uma classe de funções estacionárias, aquela que possui os mesmos limites do funcional $J[y]$:

$$\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{df}{dy'} = 0$$

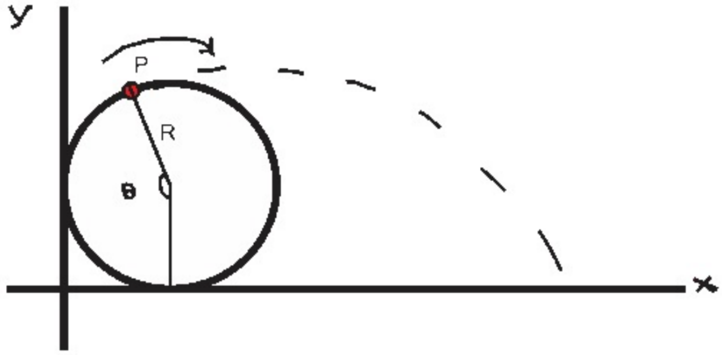
Pode-se resolver o problema da menor distância entre dois pontos em um plano substituindo o funcional $S[y]$ (desenvolvido na seção anterior) na equação diferencial acima. $\frac{dS}{dy}$ é nulo, pois o funcional não depende de y, mas sim de sua derivada e $\frac{d}{dx}\frac{ds}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = const.$

A solução para essa diferencial está numa família de funções que descrevem uma reta num plano. Deste modo, conclui-se que a menor distância entre dois pontos é dada por uma reta.

3 A CURVA CICLOIDE

A curva cicloide é a trajetória definida por um ponto P em uma circunferência que, inscrita sobre um plano, é transladada paralelamente a um eixo referencial fixo, como é observado na Figura 4.

Figura 4 – A curva cicloide



Fonte: Elaborada pelos autores

É possível perceber facilmente que as paramétricas para as coordenadas $x = f(\theta)$ e $y = g(\theta)$ que definem uma curva cicloide são:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

4 O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

O problema da braquistócrona é referente à determinação da trajetória $S(x, y, t)$ mais rápida para que uma partícula qualquer se desloque entre dois pontos A e B defasados em altitude, como é mostrado na Figura 1. Essa partícula está sob a singular ação da força da gravidade e é abandonada a partir do repouso e de sua origem, em $x = 0$. O deslocamento em x é x_0, do ponto inicial ao final.

O módulo da velocidade desta partícula é dado em função de x pela expressão $|v| = \sqrt{2gy}$ ou $\frac{dS}{dt} = \sqrt{2gx}$, com isto é possível construir o funcional $T[y]$ para o qual a função $t(x, y)$ tem o valor mínimo. O intervalo $dt = \frac{dS}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{1+(xy')^2}}{\sqrt{2gx}}$. Dessa forma, $T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{x}}dx$.

A equação de Euler-Lagrange, neste caso, é: $\frac{dT}{dy} - \frac{d}{dx}(\frac{dT}{dy'}) = 0$. Como o funcional não depende de y, $\frac{dT}{dy'} = const. = C_1$. Derivando o funcional, $\frac{dT}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{x(1+(y')^2)}}$. Fazendo $y' = \tan\beta$ e isolando x, obtêm-se que: $x = \frac{1}{C_1}\sin^2\beta \equiv C_2\sin^2\beta$.

Utilizando identidade trigonométrica, $x = C_2 \sin^2 \beta = \frac{C_2}{2}(1 - \cos 2\beta)$. A variável y, por sua vez, será $y = \int \tan \beta d\beta = \frac{C_2}{2}(2\beta - \sin 2\beta)$.

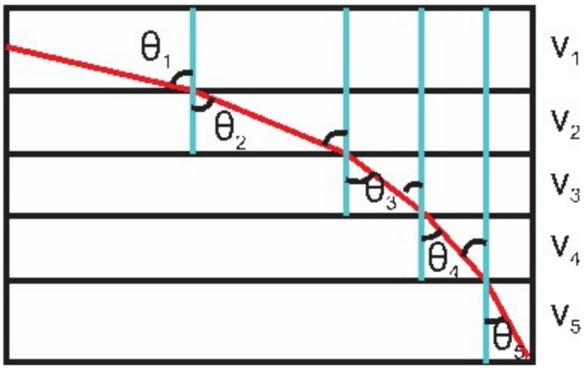
Então, *quod erat demonstrandum*, a curva $S(x, y, t)$ é definida pelas paramétricas de uma cicloide, o que implica em afirmar, categoricamente, que essa é a curva em que uma partícula qualquer, abandonada a partir do repouso e acelerada unicamente pela ação da gravidade, descreve, no menor tempo possível, uma distancia S entre dois pontos, A e B, desnivelados em altitude.

5 O PRINCÍPIO DE FERMAT

A solução do problema da braquistócrona também surge recorrendo-se ao princípio de que a trajetória percorrida pela luz, ao se propagar de um ponto a outro, é tal que o tempo gasto é mínimo, esse é o princípio de Fermat (BATISTA et al., 2006).

A luz, ao passar pela atmosfera, sofre refração devido à mudança na densidade do meio, o gradiente de densidade cresce em direção à superfície da Terra. Isso significa que, ao passar pela atmosfera, o raio de luz descreverá uma trajetória curvilínea.

Figura 5 – Refração da luz pela atmosfera terrestre



Fonte: Elaborada pelos autores

Pela lei de Snell: $\frac{v_1}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{\sin \theta_2} = \frac{v_3}{\sin \theta_3} = ... = \frac{v_5}{\sin \theta_5} = const. = K$ Como $\sin \theta = \frac{dx}{dL}$, onde dL é o comprimento infinitesimal percorrido pelo raio de luz, pode-se escrever: $K = v\frac{dL}{dx}$. substituindo, como antes, $v = \sqrt{2gy}$ e $dL = (dx)^2 + (dy)^2$, chega-se a seguinte diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{\frac{K^2}{2g} - y}{y}}$$

A solução também pertence a família de curvas cicloides.

6 O EXPERIMENTO DA BRAQUISTÓCRONA

O experimento da braquistócrona foi desenvolvido por alunos do curso de Graduação em Física da PUC Minas com o intuito de levar o problema para as escolas e discuti-lo com os alunos. Constituído por três curvas distintas: uma hipérbole, uma reta (plano inclinado) e uma cicloide, três esferas metálicas são abandonadas a uma mesma altura e ao mesmo tempo. Cada esfera percorre uma curva diferente e, ao final do trajeto, um dispositivo foto eletrônico acusa aquela que chegou primeiro. Um modelo matemático do experimento foi feito levando em consideração esses três tipos de curva em um plano euclidiano xy, como é mostrado na Figura 7.

Figura 6 – O experimento da Braquistócrona

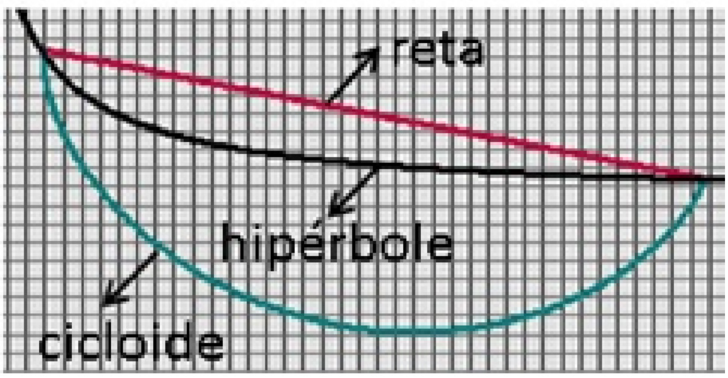
Fonte: Elaborada pelos autores

Para a hipérbole, a curva adotada no modelo foi: $y = \frac{1}{x}$, para a reta, $y = -0.195x + 1.38$ e para a cicloide, as seguintes paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0.86(\theta - \sin\theta) + 0.168(\cos\theta - 1) + 0.82 \\ y = 0.86(\cos\theta - 1) - 0.168(\theta - \sin\theta) + 1.25 \end{cases}$$

Variou-se x e, consequentemente, o parâmetro θ (entre 0.44 e 6.02 radianos) para que todas as curvas tivessem o mesmo início, em I(0.818; 1.220), e o mesmo fim, em F(6.250; 0.160) (as unidades estão em metros). Resolvendo numericamente o funcional $T[y(x)] = \int_{X_I}^{X_F} \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{(\frac{dy}{dx})^2+1}{y}} dx$ obteve-se o tempo de descida de uma esfera em cada uma das três curvas teóricas, como é mostrado na Tabela 1.

Figura 7 – Intersecção das três curvas



Fonte: Elaborada pelos autores

Tabela 1 – Tempo teórico de descida de uma esfera para diferentes curvas

Curva	Tempo(s)
Reta	2.43
Hipérbole	1.63
Cicloide	1.47

Fonte: Elaborada pelos autores

Um experimento semelhante pode ser observado no artigo "Experiências com a Braquistócrona" (BATISTA et al., 2006). Esses autores sugerem a construção do experimento usando uma prancha de madeira que servirá de base para as três curvas acima, confeccionadas a partir de tiras de borracha que podem ser facilmente obtidas em lojas de peças automobilísticas.

Para apresentar o problema da braquistócrona na sala de aula, sugere-se ao professor que, inicialmente, proponha o seguinte desafio aos alunos:

> Dois skatistas estão descendo por curvas radicais, um desce por um plano inclinado e outro por uma curva. Supondo que os dois skatistas tenham o mesmo peso e que, sob o efeito gravitacional, os dois partem simultaneamente do ponto superior A até um ponto inferior B. qual deles atingirá o ponto B primeiro? (BUSTILLOS; SASSINE, 2011).

Após apresentar este desafio, mostre-lhes o experimento, ou, alternativamente, apresente-lhes o vídeo do YouTube intitulado "*Curva da Braquistócrona - Curso de Licenciatura em Física da PUC Minas*"[4]. Para responder o desafio proposto anteriormente, basta realizar um estudo vetorial e decompor as forças envolvidas na descida dos skatistas. Percebe-se, facilmente, que o skatista que está na curva terá uma aceleração maior, devido à maior inclinação em relação aquele que está descendo pela reta. Sugere-se que, em seguida, o professor faça o desenho de um quarto de arco de uma circunferência de raio 1 no quadro e efetue os seguintes procedimentos:

1. Ligue os pontos extremos desse arco, $A(0;1)$ e $B(1;0)$, por uma reta I de inclinação igual a 45 graus.

2. Marque um ponto $C(0,293;0,293)$ exatamente na metade do comprimento do arco e ligue os pontos A com C e C com B através de duas retas, II e III, respectivamente, conforme é mostrado na Figura 8.

3. Compare o tempo que uma partícula qualquer gasta para percorrer o trajeto I com a soma dos tempos que essa mesma partícula gasta para percorrer os caminhos II e III (note que o tempo no trajeto I, em relação ao segundo percurso é maior, cerca de 0,04 segundos). Note que se um ponto C' for colocado sobre a cicloide, as inclinações das retas II e III seriam diferentes e o tempo do percurso seria ainda menor. Desse modo, a cicloide é a curva que possui o melhor ajuste angular para que o percurso seja o de menor tempo possível sempre, isso pode ser observado no experimento. Se houver algum

[4] Link: <https://www.youtube.com/watch?v=z_YeieIBuuw>

recurso multimídia dentro da sala, é recomendável que o professor utilize o programa *Winplot*, disponível gratuitamente na internet para download.

Figura 8 – Comparação entre o arco de circunferência e uma cicloide

Fonte: Elaborada pelos autores

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A curva cicloide aparece no ensino médio, de forma superficial, como a possibilidade de um trajeto curvilíneo no estudo do movimento de um corpo ou como uma construção geométrica em determinados materiais didáticos, sem, no entanto, demonstrar aplicações cotidianas para a curva. A construção de rampas "Half Pipe"para prática de esportes radicais é uma aplicação direta desse tipo de curva, justamente pelo fato da cicloide ser a solução para o problema da braquistócrona.

O problema é anti-intuitivo e quando os alunos são questionados sobre qual a curva mais rápida, geralmente respondem que é o plano inclinado. A justificativa apresentada por eles ao realizarem essa escolha é que, sendo um segmento de reta a menor distância que separa dois pontos, o plano inclinado apresentará uma distância menor e a partícula percorrerá o trajeto mais rapidamente.

Outra possibilidade é desenvolver o conceito de tautócrona. A cicloide, além de braquistócrona, é também tautócrona (do latim, mesmo tempo). Isso quer dizer que, se dois skatistas abandonarem pontos defasados em altitude de uma rampa "Half Pipe", irão atingir o ponto mais baixo dessa rampa ao mesmo tempo. Isso pode ser mostrado com o experimento (ou com o vídeo), basta abandonar duas esferas em pontos defasados em altitude e, de preferência, em lados opostos na curva cicloide. As esferas se encontrarão no ponto mais baixo da cicloide.

REFERÊNCIAS

BATISTA, G. S.; FREIRE, C.; MOREIRA, J. E. Experiências com a Braquistócrona. **Revista Física na Escola**, v. 7, n. 2, p. 58–60, 2006.

BUSTILLOS, O. V.; SASSINE, A. **A Magia da Curva Cicloide**: Braquistócrona e Tautócrona. São Paulo: Scor Tecci, 2011.

FERRAO, A. C. J.; KAWANO, A. **Curvas Naturais**. São Paulo: EPUSP, 2004.

KIBBLE, T. W. B. **Mecânica clássica**. Urmo: S.A. de Ediciones, 1974.

MARION, J. B. **Dinâmica Clássica de las partículas y sistemas**. Barcelona: Reverté, 1991.

SYMON, K. R. **Mecânica**. 2. ed. Campinas: Campus, 1982.

VIANA, R. L. **Cálculo Variacional**. Curitiba: [s.n.], 2011. 11 maio.

VIEIRA, F. B. P.; RODRIGUES, L. B.; AUGUSTINI, E. O problema da braquistócrona. **Famat em Revista: 3**, set. 2004.