

**APLICAÇÃO DE TÉCNICA DE REDUÇÃO DE VARIÂNCIA NO PRÊMIO DE
OPÇÕES ASIÁTICAS DE ELETRICIDADE POR SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO**

**VARIANCE REDUCTION TECHNIQUE APPLICATION IN ELECTRICITY ASIAN
OPTIONS PRICING BY MONTE CARLO SIMULATION**

Luciano de Paula Moraes

Instituto Federal Minas Gerais, IFMG – Campus Ponte Nova – MG

lpmoraes01@gmail.com

Paulo Roberto Bastos Maia

Mestrado em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

pbmaia@yahoo.com.br

Antônio Carlos Figueiredo Pinto

Departamento de Administração da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

figueiredo@iag.puc-rio.br

Marcelo Cabus Klotzle

Departamento de Administração da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

klotzle@iag.puc-rio.br

Leonardo Lima Gomes

Departamento de Administração da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

leonardolima@iag.puc-rio.br

Submissão: 14/02/2014

Aprovação: 30/05/2016

RESUMO

As opções financeiras são instrumentos derivativos utilizados na gestão de risco de mercado das empresas e investidores. O apreçamento das mesmas, segundo a literatura, se dá por meio de diversas metodologias que podem se basear no desenvolvimento de expressões analíticas, que fornecem soluções fechadas para a determinação dos preços, bem como no emprego de métodos numéricos, tais como as árvores e as simulações. A proposta desse trabalho é simular o prêmio de uma opção de compra europeia asiática, com *payoff* calculado sobre a média aritmética da trajetória do preço do ativo-objeto (*commodity* eletricidade e preço por MWh - submercado sudeste) em diferentes cenários de preços de exercícios e volatilidades. Nesta proposta, está incluído o emprego das técnicas de redução de variância da amostra, utilizando-se Variáveis Antitéticas e Variáveis de Controle, para corrigir erros de precisão decorrentes da simulação de Monte Carlo.

Palavras-chave: Opção Asiática, Eletricidade, Simulação de Monte Carlo, Variáveis Antitéticas, Variáveis de Controle.

ABSTRACT

Financial options are derivatives instruments used in market risk management by companies and investors. Valuing options can be done by either exact formulas or numerical procedures like trees and simulations, when there are no analytic valuations. The purpose of this article is valuing an european asian option where the payoff depends on the arithmetic average price of the underlying asset (commodity electricity and MWh price – submarket southeast), considering different strikes and volatilities. We adopt Antithetic Sampling and Control Variates in order to reduce the variance of our sample and improve the accuracy of an estimate by Monte Carlo Simulation

Key-words: Asian Option, Electricity, Monte Carlo Simulation, Antithetic Sampling, Control Variates.

1 INTRODUÇÃO

Os instrumentos derivativos são, desde o século XX, um meio de se reduzir ou eliminar riscos inerentes aos negócios, via compra ou venda de contratos de ativos financeiros ou *commodities*. Não obstante, o apereamento dos mesmos pode ser realizado por meio de uma fórmula analítica, quando possível, ou por aplicação de simulação por métodos numéricos.

Adéquam-se ao caso do apereamento por métodos numéricos alguns tipos opções exóticas e, mais especificamente, as asiáticas com *payoff* calculado pela média aritmética do preço do ativo - objeto. Esse tipo de opção, de acordo com Corrêa e Raíces (2005), é muito utilizado no mercado de *commodities*, onde os usuários não desejam exposição a grandes volatilidades de mercado.

A eletricidade é considerada uma *commodity* e seu comércio, no mercado europeu, por resultado do processo de liberação que se iniciou em 1990, pode, na atualidade, transacionar eletricidade entre fronteiras em um mercado aberto e de competitividade acirrada, onde todos os consumidores, sejam domésticos ou industriais, têm a possibilidade de escolher o seu prestador de serviços.

No Brasil, também houve uma reforma do setor elétrico iniciada em meados dos anos 1990. O modelo regulatório foi construído com o desmembramento da cadeia produtiva em quatro segmentos: geração, transmissão, distribuição e comercialização (MAYO, 2009). Esse modelo regulatório foi concebido dentro de uma perspectiva de privatização da geração e da distribuição. No entanto, atualmente, a quase totalidade da distribuição de energia do Brasil está privatizada, e a geração, na sua maioria, ainda permanece sob controle do Estado (ANEEL, 2010).

Já em 2003, no segundo processo de reestruturação do setor, houve a introdução de importantes alterações em relação ao modelo anterior de comercialização. O novo modelo do setor elétrico define que a comercialização de energia elétrica é realizada em dois ambientes de mercado, o Ambiente de Contratação Regulada - ACR e o Ambiente de Contratação Livre - ACL (CCEE, 2010). Ainda, nessa abordagem escolhida para a representação da comercialização no mercado de curto prazo e para o apereamento de energia, houve a subdivisão do Sistema Interligado Nacional em submercados (Sudeste/Centro-Oeste, Sul, Nordeste e Norte).

O setor elétrico brasileiro é conhecido pela predominância da hidroeletricidade como principal fonte produtora de energia, coexistindo como fonte secundária o potencial termoelétrico, além de outras fontes alternativas (BARROSO *et al.*, 2003).

A comercialização da energia elétrica deve atender às especificidades dessa *commodity*, dado que a mesma exibe algumas singularidades: é altamente perecível e precisa ser consumida, virtualmente, no mesmo período em que é produzida; não é economicamente armazenável em grande escala; é difícil adicionar, rapidamente, nova capacidade de geração ao sistema elétrico.

Na formação de preços no mercado de curto prazo brasileiro, o Preço de Liquidação de Diferenças (PLD) pode ser associado à volatilidade de curto prazo da eletricidade brasileira. É o resultado de um modelo computacional que simula o custo marginal de produção de energia a partir da decisão ótima de despacho (menor custo da geração). Uma das maiores preocupações dos agentes refere-se à volatilidade e imprevisibilidade do PLD, que é *proxy* brasileira do preço à vista da energia elétrica.

Devido ao modo de operação centralizado e inerente do sistema hidrotérmico brasileiro, o preço *spot* apresenta alta correlação com a hidrologia ou energia afluenta, o que reflete a característica estocástica dos preços no mercado de curto prazo. Períodos com grandes afluências levam os preços *spot* a valores muito baixos devido a não necessidade de geração de usinas termelétricas flexíveis que operam em modo de complementação térmica. Entretanto, em períodos com baixa hidrologia, o preço *spot* é elevado (MAYO, 2009).

A volatilidade associada ao preço à vista da eletricidade constitui-se fator de risco financeiro e tarifário para agentes do setor elétrico, bem como abre perspectivas para a utilização de derivativos complexos que mitiguem esse risco em um mercado regulado ou não.

2 OPÇÕES EXÓTICAS

São opções que diferem das opções simples de estilo americano ou europeu em termos do ativo subjacente ou do modo de cálculo de como e quando o investidor recebe certa remuneração. Essas opções possuem estruturas de remuneração mais complexas que as opções negociadas em bolsa e são geralmente transacionadas em mercado de balcão. Muitas opções exóticas não possuem fórmulas para seu apreamento e precisam ser avaliadas por meio de técnicas de estimação, dentre elas a opção asiática considerada nesse trabalho, cujo

payoff é calculado sobre a média aritmética do preço do ativo - objeto e não permite exercício antecipado.

2.1 Opções Asiáticas

As opções asiáticas pertencem à categoria de “opções dependentes da trajetória” (*path-dependent options*), pois suas remunerações dependem da trajetória dos preços do ativo objeto durante um período de tempo que cobre toda ou parte da vida da opção, e não apenas do preço final.

As remunerações das opções asiáticas (*payoffs*) dependem da média dos preços do ativo - objeto calculada durante um período de tempo em vez de uma única data. Esse período pode corresponder à totalidade da vida da opção ou ser menor. Essas opções são mais baratas visto que a volatilidade da média dos preços é menor que a volatilidade do próprio preço (HULL, 1996).

O *payoff* de uma opção de compra asiática considerado no trabalho é dado pela expressão:

$$Payoff = Máx(\bar{S} - K, 0) \quad (1)$$

onde:

\bar{S} é a média aritmética dos preços do ativo - objeto entre inicial e final da vida da opção e K é o preço de exercício da opção.

2.2 Solução Analítica por Black e Scholes – BS

Opções padronizadas e negociadas na Bolsa de Valores, geralmente, possuem solução analítica fechada para seu apuração. Opções exóticas negociadas em balcão raramente possuem solução analítica para o cálculo do “prêmio de opção”. Excetua-se nesse caso as opções asiáticas com *payoff* calculado sobre a média geométrica do preço do ativo – objeto, no qual a solução analítica se dá com o modelo de Black e Scholes (1973).

Contudo, outras opções exóticas e mais especificamente a asiática com *payoff* calculado sobre a média aritmética do preço do ativo - objeto não possui solução analítica, necessitando assim de técnicas de simulação para a determinação das possibilidades dos “*payoffs*”. Isso ocorre, pois o *payoff*, no caso aritmético depende da soma de variáveis lognormais correlacionadas, a qual não é lognormal e não possui nenhuma função densidade de

probabilidade reconhecível (MARINS, *et al.*, 2003). Logo, a simulação de Monte Carlo pode e será empregada nesse trabalho para simular as possíveis trajetórias dos preços do ativo - objeto.

2.3 Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é um método que consiste essencialmente em estabelecer uma amostragem artificial ou simulada, na medida em que num grande número de problemas econômicos, as observações para explicação de algum problema não encontram acesso junto à realidade por ser sua obtenção excessivamente custosa ou fisicamente impossível. Assim, uma das alternativas é recorrer à simulação, que consiste em substituir o universo real de observações por um universo teórico correspondente, descrito por uma lei de probabilidades conhecida, obtendo-se uma amostra da população teórica mediante uma sucessão de números aleatórios. Nisso consiste o método de Monte Carlo: obter números aleatórios e, logo em seguida, convertê-los em observações da variável ou variáveis do modelo. Ressalta-se que a simulação de Monte Carlo utiliza tradicionalmente a Amostragem Aleatória Simples como método amostral, o qual também será comparado com as técnicas de redução de variância.

Assim, para se obter uma estimativa do prêmio de uma opção asiática com *payoff* calculado pela média aritmética, utilizou-se o respectivo método para simular a trajetória do preço do ativo-objeto da opção ao longo da vida da mesma. Na mesma premissa do modelo de apreçamento de Black e Scholes, admitimos que os preços do ativo-objeto seguem o Movimento Geométrico Browniano (MGB), representado pela seguinte equação:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW \quad (2)$$

onde:

S_t = preço do ativo no instante t ;

μ = média da taxa de retorno do ativo (constante)

σ = desvio-padrão da taxa de retorno ou volatilidade do ativo (constante);

dW = processo de *Wiener*, variável aleatória com distribuição normal $N(0, \sqrt{dt})$

Todavia, o MGB é um processo estocástico contínuo, sendo preciso discretizá-lo adotando a hipótese de neutralidade ao risco ($\mu = R_f$) e uso do Lema de Itô, chegando à equação do ativo na data t e considerando o intervalo de tempo de 1 dia.

$$S_t = S_{t-1} * e^{[(R_f - \frac{\sigma^2}{2}) * \frac{1}{252} + \sigma * (\frac{1}{252})^{0,5} * Z_t]} \quad (3)$$

onde:

S_t = preço do ativo no instante t ;

S_{t-1} = preço do ativo na data $t - 1$;

R_f = taxa de juros livre de risco;

σ = volatilidade do ativo

Z_t = variável aleatória normal padrão referente à data t .

Fonte: BRANDIMARTE(2006)

Cabe ressaltar que, de acordo com Mayo (2009), apesar da ampla aceitação, o modelo MGB apresenta pressupostos que, ao serem analisados, desaconselham sua utilização no mercado elétrico, tendo em vista que não captura alguns efeitos da estrutura de volatilidade, tendência, sazonalidade e picos de preço.

Uma modelagem alternativa ao MGB são os processos estacionários com reversão à média, o que ocorre no longo prazo. Porém, é proposta nesse trabalho a modelagem pelo MGB, no entendimento que a opção analisada vence no curto prazo. Ademais, como será demonstrado adiante, impôs-se o teste de raiz unitária Dickey - Fuller Aumentado (ADF) para testar a estacionariedade da série de preços da energia elétrica no submercado sudeste, partindo da percepção que esse submercado apresenta todos os efeitos supramencionados (MORAES E SILVA, 2010).

2.4 Técnicas de redução de variância

A variância na estimativa do apreçamento de opções pelo método de simulação de Monte Carlo será representada pela diferença entre o limite superior e inferior do intervalo de confiança estipulado para estimação do preço da opção (95%) em relação a esse último. Quanto menor o desvio da simulação, maior a precisão dos resultados. Alguns métodos já foram propostos para minimização da variância, dentre os quais os que serão utilizados nesse

trabalho: variáveis antitéticas e de controle. A escolha do primeiro se justifica pela sua facilidade de aplicação e por não requerer um conhecimento profundo do sistema que se está simulando. A escolha do segundo se justifica pela tentativa de obtenção de melhores resultados, explorando os conhecimentos que se tem do sistema que está sendo simulado.

2.4.1 Variáveis Antitéticas – VA

Variáveis antitéticas é a mais simples e uma das principais técnicas utilizadas para reduzir a variância de uma estimativa. A ideia básica consiste em fazer o uso do fato de que uma trajetória de preços e sua imagem possuem a mesma probabilidade de ocorrência (FROTA, 2003).

Nesse trabalho, essa técnica consistirá na geração de uma variável estocástica negativamente correlacionada ao cálculo do *payoff* da opção asiática. Assim, cada trajetória deve ser associada a um par de sequências, isto é, duas trajetórias negativamente correlacionadas (BRANDIMARTE, 2006).

2.4.2 Variáveis de Controle – VC

A implementação desse método baseia-se na utilização de uma variável conhecida, denominada variável de controle, que têm um valor próximo àquele da variável que esta sendo estimada.

O emprego da técnica da variável de controle nesse trabalho aplica a diferença do prêmio obtido por Black e Scholes para o caso geométrico e o prêmio geométrico estimado por simulação ao prêmio aritmético estimado por simulação. Essa técnica promove um ajuste ao prêmio aritmético estimado, quando aplica nele essa diferença, que consiste no erro de simulação.

De acordo com BRANDIMARTE(2006), o *payoff* em tempo discreto para uma opção asiática geométrica é dado por:

$$\text{máx}\{(\prod_{i=1}^N S(t_i))^{1/N} - K, 0\} \quad (4)$$

E o modelo de apreçamento da opção asiática geométrica usada na simulação de Monte Carlo nesse trabalho é dado por:

$$P_{GA} = e^{-rT} \left[e^{a+\frac{1}{2}b} N(x) - KN(x - \sqrt{b}) \right] \quad (5)$$

e:

$$a = \frac{m}{N} \log(G_t) + \frac{N-m}{N} \left[\log(S_0 + v(t_{m+1} - t)) + \frac{1}{2}v(T - t_{m+1}) \right]$$

$$b = \frac{(N-m)^2}{N^2} \sigma^2 (t_{m+1} - t) + \sigma^2 \frac{(T - t_{m+1})}{6N^2} (N-m)(2(N-m) - 1)$$

$$v = r - q - \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$x = \frac{a - \log(K) + b}{\sqrt{b}}$$

onde:

m = é a última observação do preço do ativo subjacente;

q = são os dividendos do ativo em tempo contínuo;

G_t = é a média geométrica do ativo.

Fonte: BRANDIMARTE(2006)

3 Revisão de literatura

Para subsidiar a aplicação da técnica de redução de variância no apreçamento de opção asiática por meio de simulação, foi realizada pesquisa de trabalhos acadêmicos que retrataram o tema e reforçaram a motivação do artigo.

Boyle (1977) foi o precursor da utilização de métodos numéricos – modelo de Monte Carlo para simular o processo de geração de preços de ativo- objeto, baseado na premissa de neutralidade ao risco. A técnica de simulação empregada na época foi a de Amostragem Aleatória Simples. Com passar do tempo, verificou - se que as técnicas de redução de variância se mostraram mais robustas. Fu e Hu (1995) introduziram as técnicas de análise de sensibilidade na simulação de preços de opção tornado assim a metodologia de simulação de apreçamento de derivativos mais eficientes.

Ripley (1988) argumentou que os métodos de Monte Carlo são realmente efetivos somente para problemas mais simples. Para o autor, as variáveis antitéticas são frequentemente contraproducentes, enquanto que as variáveis de controle e a amostragem estratificada são geralmente mais úteis.

Joy *et al.* (1996) sugeriram uma nova abordagem que deveria ser muito útil na avaliação numérica de derivativos: Quase-Monte Carlo. Para os autores, essa técnica evita os problemas mais comuns encontrados nos métodos tradicionais. Por exemplo, a necessidade de aumentar o número de simulações para obter maior grau de precisão.

Broadie e Glasserman (1996) propuseram emprego de técnica de redução de variância no apuração de opções asiáticas por simulação. Eles concluíram que tal a simulação se tornou mais eficiente quando a aplicação do erro ao prêmio de simulação leva em conta o coeficiente angular do prêmio da regressão entre o prêmio aritmético e geométrico estimados. Já Broadie e Glasserman (1997) usaram simulação para apuração de derivativos de seguros, gerando dois estimadores, um de tendência alta e outro de baixo viés, ambos assintoticamente viesados e convergindo para o verdadeiro valor do preço da opção.

Ameur (1999) apresentou exemplos numéricos de como reduzir drasticamente a variância melhorando a eficiência da simulação de Monte Carlo para preço de opção no contexto do Modelo com Movimento Geométrico Browniano com aplicação de técnica de redução de variância, entre elas, variáveis de controle, antitéticas, simulação de Monte Carlo Condicional e simulação de Quase - Monte Carlo.

Charnes (2000) fez uma revisão de alguns artigos que tratavam de métodos de redução de variância, utilizados na simulação de Monte Carlo para o apuração de derivativos. A aplicação de técnicas dessa natureza torna a utilização desta técnica mais atrativa, pois diminui uma grande desvantagem desta simulação, que é a necessidade de uma grande quantidade de replicações para obter resultados precisos. Sob esse contexto, Marins *et al.* (2003) apresentaram algumas técnicas destacadas no trabalho de Charnes: variável antitética, variável de controle e hipercubo latino e adicionalmente, amostragem descritiva. A combinação da técnica variável de controle com a amostragem descritiva apresentou a menor variância no apuração de opções.

Zhao *et al.* (2013) propuseram um novo método de Monte Carlo *importance sampling* para o apuração de opções. *Importance sampling* é um método que tenta reduzir a variância alterando as medidas de probabilidade das quais as amostras são geradas. Ao contrário do procedimento clássico, o novo método proposto pelos autores elimina os dois tipos de variâncias causadas pela parte linear e pela parte quadrática da função logarítmica do *payoff*. As simulações computacionais que realizaram mostraram a alta eficiência do novo método.

Ballotta and Kyriakou (2014) apresentaram uma forma de simulação de Monte Carlo acoplada com transformada de Fourier, a qual denominaram MC-FT, para o apreçamento de contratos de opções simples e com múltiplos ativos, quando o ativo subjacente é governado por um processo CGMY (Carr, Geman, Madan and York). O método está baseado numa transformação numérica inversa com estimativas de erros computáveis, que permite gerar a distribuição cumulativa não conhecida dos incrementos do processo CGMY no nível desejado de precisão. No final, ilustram a eficiência computacional do método proposto pela comparação com os métodos existentes na literatura de apreçamento de uma vasta gama de contratos de opções.

Lee *et al.* (2014) desenvolveram um método de simulação de Monte Carlo para apreçar opções exóticas usando um modelo de volatilidade local estocástica híbrida. Duas variáveis de controle diferentes foram implementadas para reduzir a variância dos preços obtidos no método de Monte Carlo puro: opção exótica negociada no mercado e opção padrão convencional. Os resultados numéricos obtidos mostraram que a precisão foi maior quando se utilizou a opção exótica negociada no mercado como variável de controle para se apreçar outra opção exótica. Através de um estudo de caso com cotações no mercado a termo de dólar australiano em relação ao dólar americano, demonstraram que o modelo implementado pode reproduzir as volatilidades implícitas nos preços de mercado.

4 PARÂMETROS PARA SIMULAÇÃO

Os parâmetros utilizados na simulação do Monte Carlo são assumidos como constantes ao longo do tempo e estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1 - Dados considerados na simulação de Monte Carlo

S_0	Preço inicial do ativo-objeto da opção em $t = 0$	R\$ 24/MWh
R_f	Taxa anual de juros livre de risco durante a vida da opção	10%
K	Preços de exercício da opção	R\$ 12, R\$ 16, R\$ 20, R\$ 24, R\$ 28
σ	Volatilidade anual do ativo-objeto da opção	20,30, e 40%
T	Prazo de vencimento da opção (dias úteis)	42
t	Pontos da trajetória (dias úteis)	1,2,...,42
	Número de observações por trajetória	1000
	Número de simulações	9000

4.1 Discussão dos resultados

O teste ADF foi proposto para verificar a estacionariedade da série de preços da energia elétrica no submercado sudeste, com preço por MWh e no período crítico de utilização de energia elétrica pelo usuário (horas de ponto pesada), partindo da percepção que esses preços compartilham de características das séries financeiras. O período de dados do preço da energia elétrica está compreendido entre a primeira semana do mês 02/2002 e primeira semana do mês 02/2010, ou seja, os preços são semanais. O *software* utilizado para o teste foi o Eviews® versão 2005. O resultado está disposto na tabela a seguir:

Tabela 2 – Resultado do teste ADF

		Estatística t	Prob.
Teste ADF		-2.680394	0.0783
Valores Críticos:	1%	-3.446083	
	5%	-2.868370	

O valor t calculado para o teste ADF é menor que o t crítico ao nível de 5% de significância, indicando que a hipótese nula não pode ser rejeitada. Conclui-se então que a série de preços de energia elétrica no submercado sudeste não é estacionária, podendo assim, ser utilizada em métodos estocásticos, no caso desse trabalho MGB.

Procedeu-se então, o cálculo do prêmio da opção de compra asiática com *payoff* baseado na média aritmética do ativo-objeto, no caso, o preço da eletricidade no submercado sudeste. Os prêmios foram estimados pelo método da Simulação de Monte Carlo e o *software* utilizado foi o MATLAB® versão 2010. Os resultados estão dispostos na tabela a seguir:

Tabela 3 – Prêmios de opção da AAS calculados por Simulação de Monte Carlo.

Amostragem Aleatória	Prêmios de Opção de Compra Asiática			Variância em função do prêmio AAS		
	1 = 20%	2 = 30%	3 = 40%	1 = 20%	2 = 30%	3 = 40%
Simplex						
K1 = \$ 12	12,01	12,0432	11,9974	0,00388	0,00585	0,00776
K2 = \$ 16	8,0992	8,0852	8,0307	0,00582	0,00882	0,01168
K3 = \$ 20	4,1586	4,1445	4,1714	0,01111	0,01708	0,02215
K4 = \$ 24	0,5929	0,8432	1,0431	0,05212	0,05503	0,05819
K5 = \$ 28	0,0013	0,0223	0,0839	1,15385	0,33184	0,20262

As variâncias dos prêmios foram calculadas em relação aos prêmios da AAS. O preço inicial do ativo-objeto é R\$24/MWh. Os outros *inputs* estão dispostos na Tabela 1.

Tabela 4 – Prêmios de opção da VA calculados por Simulação de Monte Carlo.

Variáveis Antitéticas	Prêmios de Opção de Compra Asiática			Variância em função do prêmio AAS		
	$\sigma_1 = 20\%$	$\sigma_2 = 30\%$	$\sigma_3 = 40\%$	$\sigma_1 = 20\%$	$\sigma_2 = 30\%$	$\sigma_3 = 40\%$
K1 = \$ 12	12,016	12,016	12,016	0,00000	0,00000	0,00000
K2 = \$ 16	8,0821	8,0821	8,0821	0,00000	0,00000	0,00000
K3 = \$ 20	4,1482	4,1501	4,1726	0,00000	0,00036	0,00170
K4 = \$ 24	0,5854	0,8182	1,0624	0,02412	0,02597	0,02761
K5 = \$ 28	0,0009	0,0211	0,0915	0,69231	0,32735	0,20739

As variâncias dos prêmios foram calculadas em relação aos prêmios da AAS. O preço inicial do ativo-objeto é R\$24/MWh. Os outros *inputs* estão dispostos na Tabela 1.

Tabela 5 – Prêmios de opção da VC calculados por Simulação de Monte Carlo.

Variáveis de Controle	Prêmios de Opção de Compra Asiática			Variância em função do prêmio AAS		
	$\sigma_1 = 20\%$	$\sigma_2 = 30\%$	$\sigma_3 = 40\%$	$\sigma_1 = 20\%$	$\sigma_2 = 30\%$	$\sigma_3 = 40\%$
K1 = \$ 12	12,0159	12,0159	12,0155	0,00004	0,00009	0,00017
K2 = \$ 16	8,0821	8,0824	8,0819	0,00006	0,00014	0,00025
K3 = \$ 20	4,1483	4,1508	4,1699	0,00012	0,00029	0,00048
K4 = \$ 24	0,5889	0,823	1,0589	0,00051	0,00095	0,00134
K5 = \$ 28	0,0005	0,0212	0,0889	0,69231	0,01794	0,01311

As variâncias dos prêmios foram calculadas em relação aos prêmios da AAS. O preço inicial do ativo-objeto é R\$24/MWh. Os outros *inputs* estão dispostos na Tabela 1.

Observa-se nas Tabelas 3,4 e 5 que os prêmios de opção calculados pelo método de AAS, VA e VC tendem a 0 quando os preços de exercícios encontram muito fora do dinheiro, ou seja, em opções *out the money*. Na maioria dos casos, os resultados ficaram dentro do esperado - mantendo-se constante todos os *inputs* da Tabela 1, exceto o preço de exercício (K), - pois, de acordo com Figueiredo (2005), nas opções de compra, a volatilidade impacta positivamente no prêmio das mesmas.

4.2 Redução de variância nos prêmios de opção pelas técnicas de AAS, VA e VC.

Para maior percepção da redução de variância nos prêmios de opção obtidos pelas técnicas utilizadas nesse trabalho, foram utilizados gráficos de linha com diferentes volatilidades (20%, 30% e 40% ao ano), que estão dispostos a seguir:

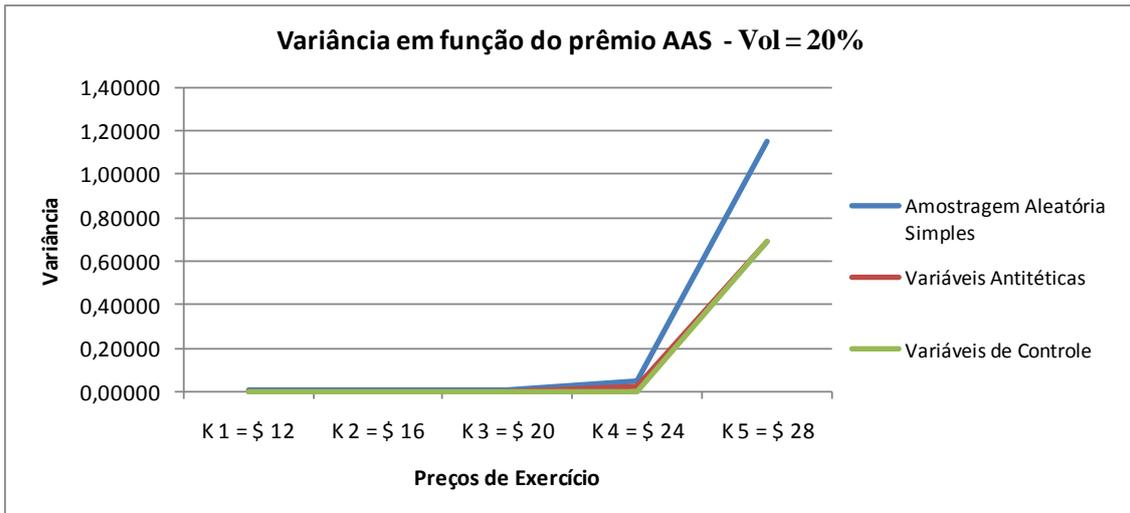


Gráfico 1 – Variância dos prêmios de opção estimados por Simulação de Monte Carlo para Amostragem Aleatória Simples, Variáveis Antitéticas e Variáveis de Controle, com volatilidade anual de 20%, e demais *inputs* dispostos na Tabela 1.

Fonte: Elaborado pelos autores.

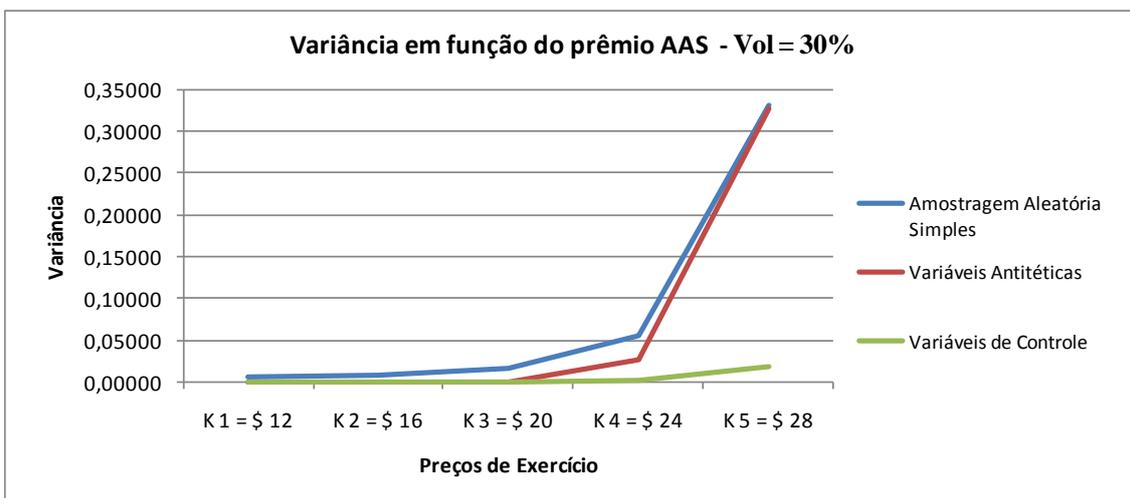


Gráfico 2 – Variância dos prêmios de opção estimados por Simulação de Monte Carlo para Amostragem Aleatória Simples, Variáveis Antitéticas e Variáveis de Controle, com volatilidade anual de 30%, e demais *inputs* dispostos na Tabela 1.

Fonte: Elaborado pelos autores.

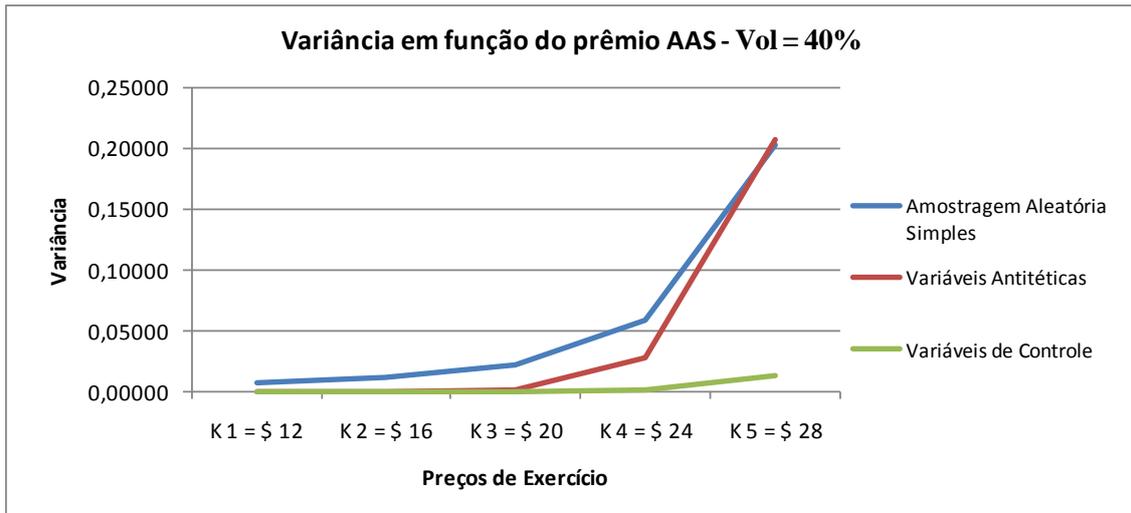


Gráfico 3 – Variância dos prêmios de opção estimados por Simulação de Monte Carlo para Amostragem Aleatória Simples, Variáveis Antitéticas e Variáveis de Controle, com volatilidade anual de 40%, e demais *inputs* dispostos na Tabela 1.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Verificou-se que a variância dos prêmios de opção obtidos pela Amostragem Aleatória Simples (AAS) muito se distanciou em comparação às técnicas de redução de variância (VA e VC). Essas últimas mostraram-se bem próximas quando submetidas a uma volatilidade anual de 20%, de acordo com o Gráfico 1.

Entretanto, as variâncias dos prêmios de opção obtidos por AAS, VA, VC mostraram-se sensíveis ao aumento da volatilidade (30% ao ano), principalmente para opções dentro do dinheiro, onde nota-se o aumento da variância nos prêmios estimados por AAS e VA. A técnica de redução de variância VC mostrou-se mais eficiente com a respectiva volatilidade.

Acentuando-se mais ainda a volatilidade anual (40%), a técnica de redução de variância VC demonstrou menor variância em relação VA e AAS. Com a respectiva volatilidade como *input* do prêmio de opção, verifica-se o deslocamento da curva da técnica de VA e método de AAS aumentando a variância para opções *in the money*, o que contrasta com a imobilização da curva da técnica VC frente às outras.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma opção asiática é um derivativo complexo, principalmente quando o *payoff* é baseado na média aritmética da trajetória do preço do ativo-objeto ao longo da vida da opção. Nesse contexto, a Simulação do Monte Carlo, que por sua vez utiliza o método da Amostragem Aleatória Simples pode ser usada para a avaliação dessa opção, que não possui uma resolução analítica.

Nesse trabalho buscou-se reduzir a variância em torno do cálculo do prêmio de opção estimado pelo método da Amostragem Aleatória Simples, utilizando-se para tanto as técnicas de redução de variância Variáveis Antitéticas e Variáveis de Controle.

Os resultados empíricos demonstraram que a técnica Variáveis de Controle apresentou-se mais consistente do que a técnica Variáveis Antitéticas para redução da variância do prêmio em função do método de Amostragem Aleatória Simples, principalmente quando a volatilidade se acentua no cálculo do prêmio das opções.

Contudo, a técnica Variáveis de Controle pode ser também interessante para análise em trabalhos futuros para opções *out of the money* e com aplicações de outras técnicas de redução de variância existentes, como Hipercubo Latino e Amostragem Descritiva, bem como combinação de algumas dessas técnicas.

Como aprimoramento futuro do trabalho, sugere-se a utilização de outros processos estocásticos utilizados para modelar preços de energia elétrica como o de reversão para a média com saltos ou com cadeias de Markov.

REFERÊNCIAS

- AMEUR, H. B. **Variance reduction of Monte Carlo and randomized quasi-Monte Carlo estimators for stochastic volatility models in finance**. Institute of Electrical and Electronics Engineers. New Jersey, 1999.
- ANEEL - Agência Nacional de Energia Elétrica**. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br/area.cfm?idArea=10&idPerfil=2>>. Acesso em 01/09/2010.
- BALLOTTA, L.; KYRIAKOU, I. Monte Carlo Simulation of the CGMY process and option pricing. **Journal of Futures Markets**, 34(12): 1095-1121, 2014.
- BARROSO, L. A.; GRANVILLE, S.; TRINKENREICH, J.; PEREIRA, M. V.; LINO, P. Avaliação de estratégias de redução de risco hidrológico para empresas com portfólios predominantemente hidroelétricos. **In: XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica**. Uberlândia, 2003.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, 81 (3): 637-59, May 1973.
- BOYLE, P.P. Options: A Monte Carlo approach. **Journal of Financial Economics**, v.4, p.323-338, 1977.
- BRANDIMARTE, P. **Numerical methods in finance and economics: a MATLAB-based introduction**. 2nd. ed. Wiley-Interscience, 2006.
- BROADIE M. & GLASSERMAN P. Estimating Security Price Derivatives Using Simulation. **Management Science**, 42 (2): p. 268-285, 1996.
- CCEE - Câmara de Comercialização de Energia Elétrica**. Disponível em <<http://www.ccee.org.br/cceeinterdsm/v/index.jsp?vgnextoid=65daa5c1de88a010VgnVCM10000aa01a8c0RCRD>>. Acesso em 12/10/2010.
- CHARNES J. M.. Using Simulation for Option Pricing. In: 2000 Winter Simulation Conference, ed. J. A. Joines, R. R. Barton, K. Kang, and P. A. Fishwick, 2000. **Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference**.
- CORREA, A. L.; RAÍCES, C. **Derivativos agrícolas**. 1a ed. São Paulo: Globo, 2005.
- FIGUEIREDO, A. C. **Introdução aos derivativos**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

FROTA, F. A. **Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas**. DEI-PUC. Rio, 2003. 143p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2003.

FU, M. C. and HU J. Q. 1995. Sensitivity analysis for Monte Carlo simulation of option pricing. **Probability in the Engineering and Informational Sciences**, 9 (3): 417–446, 1995.

HULL, J. **Introdução aos mercados futuros e de opções**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1996. 100p.

JOY, C.; BOYLE,P.P.; TAN, K.S. Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance. **Management Science**, 926-938, June 1996

LEE, G.; TIAN,Y; ZHU,Z. Monte Carlo Pricing Scheme for a Stochastic-Local Volatility Model. **Proceedings of the World Congress of Engineering 2014** Vol II, WCE 2014, July 2-4, 2014, London, U.K.

MARINS, J.; SANTOS, J.; SALIBY, E. Avaliação de Técnicas de Redução de Variância na Estimção do Prêmio de Opções de Compra do Tipo Asiática. In: XXXV - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2003. **Anais do XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**.

MAYO, R. **Derivativos de eletricidade e gerenciamento de risco**. Rio de Janeiro: Synergia, 2009. 142 p.

MORAES, L.; SILVA, C. A. G. Análise da volatilidade do preço do café: uma aplicação dos modelos EWMA e GARCH. In: XVII Simpósio de Engenharia de Produção – SIMPEP, 2010, Bauru, São Paulo, 2010.

RIPLEY, B.D. Uses and abuses of Statistical Simulation. **Mathematical Programming**, 42: 53-68, 1988.

ZHAO, Q.; LIU, G.; GU,G. Variance Reduction Techniques of Importance Sampling Monte Carlo Methods for Pricing Options. **Journal of Mathematical Finance**, 3: 431-436, 2013.