Matemática & Ciência

MATEMÁTICA MEDIEVAL:
a emergência de uma teoria aritmética para razões

Oscar João Abdounur*

1

Resumo

O presente texto tem como objetivo exibir algumas evidências do processo de aritmetização de razões na Idade Média e Renascimento, apresentando sinais da coexistência de tradições aritméticas e geométricas no tratamento de razões nesse período, bem como da forte tensão entre elas, caracterizando uma indeterminação nas estruturas associadas ao conceito de razão. Procura ressaltar o uso de razões em contextos musicais como um fator importante na permanência da tradição clássica e portanto da tensão mencionada, mas ao mesmo tempo desencadeador, através do problema da divisão do tom, do uso da tradição aritmética nesse mesmo contexto.

Palavras-chave: Matemática medieval. Música. Razões.

Introdução

O foco desse trabalho[2] é a emergência de uma teoria aritmética para razões na tradição latina medieval. Utiliza-se, nesse contexto, o termo aritmetização para designar o processo no qual o conceito de razão per-

* Graduado em Engenharia Eletrônica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica; Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo; Doutoro em Educação pela Universidade de São Paulo; Pós-doutorado em História da Ciência no *Max Planck Institut für Wissenschafts geschichte* em Berlim, Alemanha. Professor associado/livre-docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
e-mail: abdounur@ime.usp.br

DOI: https://doi.org/10.5752/P.2674-9416.2019v2n1p9-19

[2] Esse artigo se constitui em um texto elaborado, em virtude de minha participação em uma mesa redonda do Colóquio CESIMA - Centro Simão Mathias de Estudos em História da Ciência, da PUC SP, no ano de 2006.

deu seu caráter puramente geométrico para assumir uma natureza essencialmente aritmética estruturalmente muito semelhante a primeira mas semanticamente distinta. Nesse contexto, tal conceito deixa, entre outros aspectos, de ser compreendido como uma comparação entre duas grandezas de mesma natureza para assumir o significado de um número; sua composição aproxima-se muito da idéia de multiplicação de números e a proporção entre razões tende a identificar-se com a idéia de igualdade entre números.

O complexo processo de aritmetização das teorias de razão, já iniciado potencialmente na Antigüidade grega tardia, estendeu-se ao longo da Idade Média até o Renascimento, recebendo significativas contribuições das tradições latinas, bizantinas e árabes e culminando nesse último período em uma forte confluência de tais tradições, o que conduziu a uma aceleração sem igual de tal processo durante o Renascimento.

Até esse período, o uso de razões não possuía uma estrutura bem delimitada, apresentando ora características aritméticas, ora características geométricas ou uma combinação de ambas as tendências. Tais diferenças estruturais, que acompanharam os conceitos de razão e proporção desde a Antigüidade, correspondem a teorias subjacentes a tratados não somente de matemática, mas ainda de disciplinas próximas como música teórica até o Renascimento. No século XVI, o processo de aritmetização acelera-se até que no século XVII prevalece finalmente uma teoria aritmética de razão.

Contexto medieval do conceito de razão: duas tradições

Antes de contextualizar o conceito medieval de razão, é importante caracterizar a ideia de composição de razões, focal na compreensão do processo de aritmetização mencionado. Utilizada com maior freqüência até o século XIV d.C., a composição de razões no estilo clássico grego significa que para lidar com a razão composta de $a:b$ com $c:d$, era necessário encontrar uma magnitude e tal que $c:d :: b: e$, de modo que a composição de $a:b$ com $c:d$ se tornava a de $a:b$ com $b:e$, que resulta em $a:e$.

O conceito medieval de razão é uma herança tanto da tradição geométrica clássica grega como da tradição aritmética grega tardia. A primeira proveniente da definição 5 do livro V de *Os Elementos* de Euclides (HEATH, 1956, p.120), com caráter essencialmente geométrico. Evidências da tradição aritmética para razões parecem ocorrer, pela primeira vez, no problema transversal de Menelaus (c. 70-130), que compõe razões sem as restrições mencionadas acima, ou seja, como uma multiplicação, bem como com Theon de Alexandria (c.335-405) (GROSHOLZ, 1987), que inseriu interpolações na definição 5 do livro VI de *Os Elementos* (HEATH, 1956, p.189), distorcendo o sentido euclidiano genuíno de composição de razões ao aproximar a idéia de composição da de multiplicação. Segundo Fowler, a transformação do conceito de razão estreitamente vinculado ao *logos* grego no período clássico com um vasto, mas definitivamente não aritmético, sentido expressando uma relação entre números ou magnitudes homogêneas – no caso, comprimentos, áreas, intervalos musicais etc – para um significado aritmético ocorreu, não antes do século I a.C., com Heron, sendo tal processo ainda mais forte na Idade Média tardia (FOWLER, 1989). Tais transformações são bastante relevantes para a compreensão da emergência de uma teoria aritmética de razão, na medida em que suas características foram transmitidas para a Idade Média por Jordanus Nemorarius, Campanus de Novara e Roger Bacon (SYLLA, 1984).

As duas tradições mencionadas viriam a originar na Idade Média diversas tendências no tratamento de razões, caracterizadas, no dizer de Sylla (SYLLA,1984, p.11), essencialmente por duas delas: um geométrica, associada à matemática téorica, música e física presente, particularmente, no *De proportionibus* de Bradwardine, na qual razão é uma comparação entre magnitudes de mesma natureza/entre números categoricamente diferente de número e, composição de razões, é um operador no qual o segundo termo da cada razão envolvida deve ser igual ao primeiro termo da razão consecutiva, de acordo com a maneira como razões são operadas na proposição 23 do livro VI de *Os Elementos* (HEATH, 1956, pag. 247); outra aritmética associada a cálculos práticos usando razões e com astronomia.

As tradicões anteriores relacionam-se e combinam-se curiosamente em contextos não somente matemáticos, mas em outros tais como musicais. Tanto a tendência geométrica, como a aritmética, estiverem frequentemente presentes em textos matemáticos medievais envolvendo razões e algumas vezes curiosamente mescladas em um mesmo texto, seja no contexto de composição ou de multiplicação de razões (SYLLLA, 1984), seja na definição de razão por teóricos medievais (DRAKE, 1973).

Ao examinar as duas tradições mencionadas, Sylla (1984) sugere que elas não abarcam todos os conceitos medievais e da Antigüidade para razões, nem ocorriam sempre separadas, mas mesclavam-se de modo frequente estranhamente, representando dois polos das maneiras nas quais razões e operações com razões poderiam ser tratadas.

Alguns exemplos da presença das tradições para razões

No início da Idade Média, Boethius (475-524) é um exemplo característico. Seguindo a tradição pitagórica, suas obras *De institutione musica* e *De institutione arithmetica* foram exploradas por inúmeros teóricos desde o período Carolíngio até o século XVI, determinando a tradição pitagórica como preponderante na tratadística da música medieval. Ao mesmo tempo, a necessidade de solução de problemas estrutrais em música teórica, tais como o *Temperamento*, no final do Renascimento, levou ao questionamento por parte dos teóricos a respeito da divisão do tom inteiro, que matematicamente, equivale à divisão da razão 8:9. Paralelamente, houve preponderância da tradição clássica em contextos teórico-musicais até fins do século XV, quando a necessidade de inserção de geometria, como ferramenta para resolução de problemas teórico-musicais, gatilhou um processo gradativo de aritmetização do conceito de razão em âmbito musical que possui repercussão na evolução de tal conceito de modo geral.

No século XIV, o caráter subjacente à teoria de razão sofreu modificações importantes. Na tradução latina de *Os Elementos* de

Euclides, por Campanus de Novara (séc. XIII) – tal autor parece ter fracassado na distinção entre as duas tradições gregas, inserindo o conceito *denominatio* na definição original de proporcionalidade de razões do livro V de *Os Elementos*, contribuindo para a aritmetização de tal conceito na medida em que o significado do termo *denominatio* nesse contexto, embora discutível, flutua principalmente entre uma razão como uma fração reduzida a seus mínimos termos ou o quociente dessa fração. Juntamente com outras fontes do século XIV, a tradução de Campanus possui assim uma terminologia aritmética que não deriva da teoria geométrica para razões do livro V de Euclides, mas sim de um número de diferentes fontes incluindo provavelmente a Arithmetica de Jordanus de Nemore do século XIII.

A tradução latina de *Os Elemento*s por Campanus, no século XIII, é geralmente considerada a principal fonte para a teoria de razões do século XIV de Bradwardine e Oresme, bem como um modelo medieval para *Os Elementos* até o século XVI, quando tal versão é substituída por traduções realizadas diretamente do grego. A teoria aritmética presente na versão de Campanus, munida da terminologia *denominatio,* forneceu o fundamento para a compreensão de razões e proporções em textos matemáticos na Idade Média tardia.

Indeterminação nas teorias de razão

A partir das considerações anteriores, por um lado, o uso de razões em alguns contextos, tais como o musical, segue a tradição clássica muitas vezes amparada na autoridade pitagórica, ao passo que, por outro, o século XIV intensifica o uso da tradição mais aritmética, gerando uma tensão entre tais teorias e consequentemente uma indeterminação concernente à teoria de razão preponderante na Idade Média, tensão essa que permanecerá até o século XVII. Diante disso, a teoria de música medieval poderia ainda ter contribuído para a natureza indefinida de razões matemáticas durante este período. Examinando a influência de Boécio no *Quadrívium*, Peden conjectura a possibilidade de influxo de tal teoria em textos matemáticos medievais resultante da utilização de tal teoria pelos estudantes como suporte para exercícios matemáticos (PEDEN, 1994).

Esta suposta influência musical numa teoria mais ampla para razões poderia ter fortalecido o reestabelecimento do caráter musical em alguns textos matemáticos medievais envolvendo razões, reintroduzindo idéias platônico-pitagóricas em matemática e contribuindo portanto para a coexistência de tradições diferentes e mescladas no tratamento medieval de razões.

Por outro lado, a tradição aritmética, resultante em parte da influência de Campanus, tem repercussão na música teórica renascentista, na medida em que a tradução de Campanus serviu de fonte para teóricos musicais inovadores deste período, tais como Erasmus Horicius, primeiro na Renascença a aplicar explicitamente geometria euclidiana à resolução de problemas em música teórica (PALISCA, 1995).

Tal situação traz em paralelo a semente de uma natureza contínua para razões em contextos musicais, semente essa propiciadora da emergência de uma concepção decisiva sem a qual a resolução de problemas cruciais da música teórica no século XVI tornar-se-ia impossível. Erasmus utilizou não somente a estrutura euclidiana, muito característica de sua obra *Musica*, mas principalmente a terminologia latina de Campanus (PALISCA, 1994, p.158), que, inevitavelmente, concede natureza aritmética para razão, colocando-a em um nível categório muito próximo do de número, como nunca havia sido o caso em contextos teórico-musicais.

No que concerne à Matemática, a segunda metade do século XIV assistiu mudanças importantes nas mãos de Nicole Oresme, que empreendeu um estudo detalhado sobre razões em seu *Algorismus proportionum* e *De proportionibus proportionum*, também de sua autoria. Curiosamente dedicado ao músico teórico inovador Philippe de Vitry, *Algorismus proportionum* é a primeira tentativa sistemática conhecida para apresentar regras de uso da operação de multiplicação de razões envolvendo expoentes inteiros e fracionários (CURTZE, 1868). Significando um passo importante rumo à aritmetização das teorias para razão, esta obra apresenta uma tentativa de lidar com o que se poderia chamar expoentes irracionais. Nesse estudo detalhado de razões, Oresme coloca que razões de razões, equivalente estruturalmente à expoentes nas razões, são insuficintes para esgotar todos os números reais, em terminologia moderna. Oresme concebeu razões, ainda que sem rigor, como um verdadeiro continuum, afirmando que toda a razão é como uma quantidade contínua com respeito à divisão, ou seja, que se pode tomar qualquer 'parte' de qualquer razão dada.

O *Algorismus proportionum* e o *De proportionibus proportionum* representam evidências importantes do uso de razões com caráter aritmético e forneceram ferramentas essenciais para a compreensão de temperamentos envolvendo médias proporcionais em um período em que começam a surgir outros temperamentos além do pitagórico e até mesmo uma proposta de temperamento igual, que aparece em um dos 5 tratados sobre música teórica encontrado em um manuscrito anônimo do século XIV, datado em Paris, 12 de janeiro de 1375 (ELLSWORTH, 1974, p. 445). Entretanto, a influência do tratamento especial de Oresme de razões de razões em matemática é surpreendemente limitada (GRANT, 1966, p.69) e não parece manifestar-se significativamente antes do início do século XVI na Universidade de Paris com eruditos como George Lokert e o português Álvaro Thomas, este último aparentemente o único autor que demonstra amplo conhecimento e compreensão do tratado de Oresme (GRANT, 1966, p.71).

Apesar da popularidade das teorias de razões tradicionais na Idade Média tardia, assim como da influência limitada do tratamento de razões de Oresme em matemática até o início do século XVI, aproximadamente um século após *Algorismus proportionum* e *De proportionibus proportionum*, números irracionais e grandezas incomensuráveis surgiam em contextos musicais com Nicolas de Cusa, quando, anteriormente, os sons produzidos por tais razões não eram considerados música.

Mudança de natureza nas razões em música teórica: a divisão geométrica do tom

No contexto de análise da emergência de uma teoria aritmética para razões no período medieval, é revelante considerar a necessidade de divisão geométrica do tom, na medida em que tal fato desencadeia uma mudança de natureza das razões em contextos teórico-musicais. Em princípio, as evidências sugerem que este fato ocorreu pela primeira vez com Nicolas de Cusa ao afirmar em seu *Idiota de Mente*, publicado em 1450, que o meio tom resulta da média geométrica do tom inteiro sendo, portanto, definido por um número irracional em terminologia atual. Nicolas foi provavelmente o primeiro no ocidente a formular matematicamente um conceito fundamental à compreensão do temperamento igual proposto nas obras dos músicos teóricos da alta Renascença tais como Faber Stapulensis e Franchino Gafurius, publicadas meio século depois (GOLDMAN, 1989, p.308). O trabalho de Cusa influenciou ainda o teórico germânico e cossista Henricus Grammateus (Heinrich Schreyber) no seu *Ayn new kunstlich Buech*, considerado um manual essencial ao desenvolvimento do temperamento igual.

Faber Stapulensis demonstrou que a divisão em partes iguais de um intervalo epimórico – do tipo *n: n+1* –, impossível por aritmética, poderia ser facilmente realizada através de geometria. Publicado em 1494, o *Elementalia musica*, de Faber, exibe, pela primeira vez, a construção geométrica correspondente ilustrando não apenas a divisão geométrica do tom sugerida por Cusa, mas ainda a divisão da quarta, da quinta e da oitava fazendo uso da média geométrica.

Apesar da tendência à divisão do tom e, consequente, introdução do uso da tradição aritmética em música, há exemplos no século XVI de teóricos musicais tais como Pedro Ciruelo, também teólogo e matemático na universidade de Alcalá de Henares, que utilizam a tradição geométrica. Em sua obra *Cursus quattuor mathematicarum artium liberalium*, publicada em 1516, Ciruelo apresenta a divisão do tom presente na obra de Faber, mas ao mesmo tempo na parte de *Geometria* da obra mencionada, adota as terminologias *addere* e *coniungere* para expressar a composição de razões de acordo com a tradição musical mencionada acima, realizando curiosamente a subtração reciprocamente de acordo com a tradição clássica na sétima conclusão do livro III de *Geometria* (CIRUELO, 1526). Representativa da permanência da tradição clássica ainda em meados do século XVI, essa operação corresponde modernamente a subtrair *c:d* de *a:b* e encontrar um termo intermediário *m* tal que *m:b :: c:d*, transformando, portanto, a tarefa original na subtração

m:b de *a:b :: (a:m)(m:b),* o que resulta imediatamente em *a:m*, como uma extensão natural para a operação de composição de razões.

Considerações Finais

O presente texto procurou exibir algumas evidências do complexo processo de aritmetização de razões na Idade Média e Renascimento, apresentando sinais da coexistência de tradições aritméticas e geométricas no tratamento de razões nesse período, bem como da forte tensão entre elas, caracterizando uma indeterminação nas estruturas associadas ao conceito de razão.

Procurou-se ainda ressaltar o uso de razões em contextos musicais como um fator importante na permanência da tradição clássica e portanto da tensão mencionada, mas ao mesmo tempo desencadeador, através do problema da divisão do tom, do uso da tradição aritmética nesse mesmo contexto. A complexidade de tal processo se deu assim devido aos inúmeros fatores que polarizavam ora o uso de razões para a tradição clássica, ora para a tradição aritmética prolongando esse processo até praticamente o século XVII, quando conflitos entre essas duas tendências resultam no desaparecimento da primeira tradição concernente à composição e a consolidação de uma teoria aritmética de razões.

Referências

CIRUELO, Pedro. **Cursus Quatuor Mathematicarum Artium Liberalium**: Quas Recollegit Atque Correxit Magister Petro Ciruelus. Alcalá de Henares: Arnao Guillén de Brocar, 1526.

CURTZE, Ernst Ludwig Wilhelm Maximilian (Ed.) **Der Algorismus Proportionum Des Nicolaus Oresme**. Berlin: S. Calvary & Co, 1868.

DRAKE, Stillman. Medieval Ratio Theory Vs Compound Medicines in the Origins of Bradwardine's Rule. **Isis**, 64, p. 67-77, 1973.

ELLSWORTH, Oliver B. A Fourteenth-Century Proposal for Equal Temperament. **Medieval and Renaissance Studies**, 5, p. 445-453, 1974.

FOWLER, D. Logos (Ratio) and Analogon (Proportion). In: PLATO, Aristotle; EUCLID; PETITOT, J.; THOM, R., **Archive for the History of Exact Sciences**. Genève: Patiño, 1989. p. 444-472.

GOLDMAN, David Paul. Nicholas Cusanus Contribution to Music Theory. **Rivista Internazionale di musica sacra**, 10 (3-4), p. 308-38,1989.

GRANT, Edward (Hrsg.); ORESME, Nicole. **De Proportionibus Proportionem and Ad Pauca Respicientes**. Madison, London: Univ. of Wisconsin Press, 1966.

GROSHOLZ, Emily. Some Uses of Proportion in Newton's Principia, Book I: A Case Study in Applied Mathematics. **Studies in history and philosophy of science**, 18, p. 208-220, 1987.

HEATH, Thomas L. (ed.), EUCLID. **The thirteen books of the Elements**. New York: Dover, 1956. v. lII

KATZ, Victor J. **A History of mathematics.** An introduction. New York: Harper-Collins College Publishers, 1993.

PALISCA, Claude V. The Musica of Erasmus of Höritz. In: PALISCA, Claude. **Studies in the History of Italian Music and Music Theory**. Oxford: Clarendon Press, 1994. p.146-67.

PALISCA, Claude. Horocius, Erasmus. In: SADIE, Stanley. **The New Grove Dictionary of Music and Musicians**. London: Macmillan, Music-dictionaries; Sadie, Stanley, 1995. p. 696.

PEDEN, Alison M.. De Semitone: Some Medieval Exercises in Arithmetic. **Studi Medievali**, 35, p. 368-403, 1994.

SYLLA, Edith Dudley. Compounding Ratios. Bradwardine, Oresme, and the First Edition of Newton's Principia. In: MENDELSOHN, Everett. **Transformation and Tradition in the Sciences.** Essays in Honor of I. Bernard Cohen. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. p. 11-43.

Observação

Este artigo inicialmente foi publicado em:

ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria; ZATERKA, Luciana; FERRAZ, Márcia Helena Mendes (eds.). **Atas CESIMA Centro Simão Mathias de Estudos em História da Ciência - ano X**. Colóquio CESIMA Ano X e XV Reunião da RIHECQB. São Paulo, 2006. v. 1. p. 349-359.