

APRENDE ESTOCÁSTICOS CON MATERIAL LÚDICO EN EL BACHILLERATO UNIVERSITARIO

María del Socorro Rivera Casales*
José Marcos López Mojica**

Resumo

O objetivo deste estudo foi promover o desenvolvimento das idéias fundamentais de estocástica de acordo com Heitele (1975), através de atividades recreativas e aleatórias, em particular para beneficiar idéias prévias do acaso, como antecedente ao cálculo de probabilidades. Concebeu-se um curso em duas sessões para professores do nível secundário superior e superior, com atividades que favorecem o desenvolvimento do pensamento probabilístico; já que a probabilidade é importante na tomada de decisões na vida cotidiana, "mas também é importante reconhecer o 'Azar' como uma possibilidade de tomar decisões baseadas em conceitos matemáticos para prever ou estimar a probabilidade de um evento". Para a fundamentação teórica, o trabalho apresenta como suporte teórico três eixos importantes: Epistemológico, Cognitivo, Social. Segundo Ojeda (2003), é necessário fornecer ao indivíduo uma cultura matemática abrangente, o que leva ao tratamento de questões probabilísticas e estatísticas.

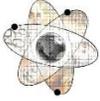
Palavras-chave: Educação Matemática. Estatística. Pensamento probabilístico.

Resumen

Este estudio tiene como objetivo, mediante actividades lúdico-aleatorias propiciar el desarrollo de las ideas fundamentales de estocásticos según Heitele (1975), en lo particular interesa beneficiar ideas previas del *azar*, como estado antecedente al cálculo de probabilidades. Ha sido diseñado un curso en dos sesiones, para profesores de nivel medio superior y superior, a los cuales se les presentarán actividades que les favorezcan el desarrollo del pensamiento probabilístico; ya que la probabilidad es importante en la toma de decisiones en la vida cotidiana, "*pero también es importante que se reconozca al Azar como una posibilidad para la toma de decisiones a partir de nociones matemáticas que permitan predecir o estimar la probabilidad de un suceso*". Para la fundamentación teórica, el trabajo presenta como sustento teórico tres ejes importantes: *Epistemológico, cognitivo, Social*. Según Ojeda (2003), se exige proporcionar al individuo una cultura matemática integral, esto conlleva al tratamiento de temas probabilísticos y de estadística.

* Maestra en Ciencias con la especialidad en Matemática Educativa por el CINVESTAV México. Profesora de Matemáticas de la ENP No.2 "Erasmus Castellanos Quinto" UNAM, DME "Cinvestav" IPN, México. E-mail: soco_rcms@yahoo.com.mx

** Licenciado en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Guerrero. Maestro y Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. E-mail: jmlopez@cinvestav.mx



Palabras clave: Educación Matemática. Estadística. Pensamiento probabilístico.

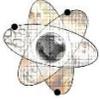
Introducción

Partimos de la idea que mediante actividades lúdico-aleatorias se puede propiciar el desarrollo de nociones de *azar*, de *probabilidad* y del *enfoque frecuencial*.

Las actividades están pensadas para estudiantes del bachillerato universitario (17-18 años), pero son actividades que se aplican a cualquier nivel, a los cuales se les presentarán actividades que les favorezcan el desarrollo del pensamiento probabilístico; además se considera que la probabilidad es importante en la toma de decisiones en la vida cotidiana, pero también es importante que se reconozca al Azar como una posibilidad para la toma de decisiones a partir de nociones matemáticas que permitan predecir o estimar la probabilidad de un suceso. Las actividades se analizaron bajo cinco criterios (OJEDA, 2006). Es importante mencionar que éstas propician la distinción de los vértices del triángulo epistemológico (STEINBRING, 2005), por ello es importante la interacción de los niños con el material concreto desarrollado por López e Mojica.

La presentación de la propuesta institucional señala que:

... la enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria presenta, a través de este programa, cambios significativos en la estructura y secuencia de los contenidos y principalmente en su enfoque metodológico, pues se orienta hacia un aprendizaje basado en la solución de problemas. Por medio de los contenidos propuestos, el alumno ahora conocerá, comprenderá y aplicará la estadística descriptiva, la simbología de los conjuntos, y el concepto de probabilidad en el planteamiento de problemas que se resuelven aplicando los conocimientos ya enunciados. La aplicación de este método privilegia el trabajo en el aula, ya que el profesor identificará con el grupo problemas tipo, posibles de resolver con el paradigma en cuestión. (Programa de estudios de ENP, 1996, clave 1712).



El método propuesto para el bachillerato universitario parte del planteamiento de problemas simples que irán aumentando su complejidad en el tratamiento de un mismo tema; para cada problema el profesor establecerá mecanismos de análisis de los componentes conceptuales y operativos del problema en cuestión, a fin de que el alumno, en lo posible, lo interprete. Este método se basa en la identificación de sus elementos y las relaciones entre ellos para, finalmente, arribar a posibilidades de solución y de interpretación. Por tanto, el método tiende a constituirse en una etapa intermedia en el tránsito de una enseñanza lineal y algorítmica a una enseñanza de construcción. Para evaluar los alcances de este método de trabajo es necesario que el profesor, luego del planteamiento y análisis de problemas y procedimientos de solución con el grupo, asesore en clase la parte de la ejecución y proporcione la realimentación pertinente al alumno.

Elementos Teóricos

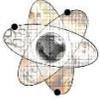
Para la fundamentación teórica, el trabajo presenta como sustento tres ejes importantes: *Epistemológico, Cognitivo, Social*.

Epistemológico, se consideran las ideas fundamentales estocásticas; Heitele (1975) propone un currículo en espiral en el cual una noción matemática, en particular la teoría de la probabilidad, se trabaje en varios grados escolares con diferentes niveles de profundidad. El cursillo está diseñado para favorecer el desarrollo de las ideas fundamentales estocásticas, con actividades que nos permitirán mostrar que las ideas fundamentales no pueden ser sólo ancladas el ámbito escolar.

Ojeda propone las ideas fundamentales:

- Medida de probabilidad.
- Espacio muestra.
- Adición de probabilidades.
- Regla del producto e independencia.
- Combinatoria.
- Equiprobabilidad y simetría.
- Variable aleatoria.
- Modelo de urna y simulación.
- Ley de los grandes números.
- Muestra.

(OJEDA, 2007, p. 13)



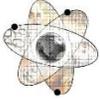
También se considera el trabajo de Piaget e Inhelder (1951), para el desarrollo de la idea de azar en el niño. Para ello, los autores consideraron importante la concepción de la mezcla aleatoria como irreversible y progresiva. Esto significaría el reconocimiento de la reversibilidad de las operaciones y la comprensión de lo que es el azar. Para describir el desarrollo de la concepción de mezcla aleatoria en el niño Piaget describe tres estadios: el de operaciones *preconcretas* (4-7 años), el de operaciones *concretas* (8-10 años), el de operaciones *formales* (11 años en adelante).

Los *elementos cognitivos* que se consideran son: la intuición probabilística, según Fischbein (1975) las intuiciones son el *conocimiento inmediato derivado de la experiencia*; clasifica las intuiciones en primarias, adquisición cognitiva derivada de la experiencia del individuo, y secundarias definidas como adquisiciones cognitivas formadas por educación científica. Las actividades están diseñadas para explotar las intuiciones primarias, mediante el desarrollo de experiencias productoras de intuiciones secundarias.

Respecto al *elemento social*, consideramos de importante los recursos semióticos, en particular nos apoyamos en materiales concretos, ya que la distinción e interrelación del objeto y signo favorecen la adquisición del concepto (STEINBRING, 2005).

Ojeda (2007) establece la existente necesidad de los estocásticos en el ámbito científico, político, económico. Por ello, la necesidad de llevar a cabo actividades donde se desarrollen intuiciones probabilísticas. Eventualmente, usaremos el término *pensamiento matemático* para referirnos a las formas en que las personas piensan las matemáticas.

Dado que la actividad humana involucra procesos de razonamiento y factores de experiencia, cuando desempeña toda clase de funciones, nos interesa al hablar de pensamiento matemático, localizar propiamente el sentido de la actividad matemática como una actividad humana (CAN-



TORAL et al., 2003). Por lo que uno de los aspectos relevantes del cursillo es el desarrollo del pensamiento matemático en particular un pensamiento probabilístico funcional, cuando el conocimiento matemático transforma una realidad y al participante mismo.

Actividades

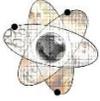
Las actividades propuestas son: mezcla aleatoria, urnas y decisión, ruletas, tablero de Galtón y lanzamiento de una moneda.

1. Mezcla aleatoria

Se deriva de la propuesta por Piaget e Inhelder en su libro *La Gènesis de L'idée de Hasard Chez L'enfant* (1951), para el desarrollo de la idea de mezcla aleatoria. Consiste en una bandeja de madera susceptible de balanceo, con canicas de dos tipos en igual proporción, colocadas en un lado de la bandeja y libres de rodar al lado opuesto en cada balanceo (ver *Figura 1*); con este productor de mezclas aleatorias se investigó sobre la idea de *azar* en los niños.

El material a ser utilizado en la actividad consiste en: una bandeja de madera con dimensiones de 35 cm de largo, 15 de ancho y 4 cm de alto, susceptible de balanceo, con canicas del mismo tamaño, de dos colores en igual proporción (7 azules y 7 verdes), colocadas en un lado de la bandeja y libres de rodar al lado opuesto en cada balanceo

Para explorar acerca de la idea de azar, utilizando la actividad de Piaget e Inhelder, se propone cuestionar a los jóvenes: ¿Cómo quedarán las canicas después de un balanceo?, ¿Después de dos, cinco, siete, o cincuenta?, Dibuja la posición de las canicas, las trayectorias de las canicas, después de cada balanceo; ¿Quedarán las canicas en la posición inicial si balanceo la bandeja muchas veces?, ¿Cuándo es más fácil que queden en la posición inicial, cuando tengo 4 de cada color ó 50 de cada color?



La actividad privilegia la idea de azar sobre otras ideas implicadas utilizando un número relativamente grande de canicas, por el cual resulta muy difícil la anticipación de un acomodo particular al cabo de un balanceo de la bandeja.

En efecto; el número (N) indica las maneras en que las 14 canicas indistinguibles, excepto por el color (de dos tipos, siete de un color y siete de otro), se pueden acomodar en los 14 lugares disponibles para ellas es:

$$N = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{7!} \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7!}$$

$$N = 13 \times 11 \times 8 \times 3 = 3432$$

2. Urnas y Decisión

Consiste en **sacar al azar** una canica de una de dos bolsas, etiquetadas 1 y 2 (ver Figura 2), de las cuales se conoce la composición de sus contenidos de canicas de dos colores; si la canica extraída es del color ganador, se gana un premio. Se pregunta a los jóvenes de cuál de las bolsas conviene extraer la canica para una variedad de composiciones de sus contenidos.

Las respuestas correctas supondrían la diferenciación entre las *posibilidades* de la bolsa 1 y las de la bolsa 2; para los casos de desigualdad, se ha propuesto una diferencia grande entre las cantidades de los contenidos para hacer relevantes las composiciones, lo cual se espera que motive a los estudiantes a continuar con la experiencia (ver *Tabla 1*).

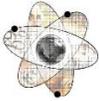


Tabla 1. Composición de Canicas

No. Experimento	Composición		Observación
	Bolsa 1	Bolsa 2	
1	2/2	4/4	Doble certeza.
2	4/4	0/2	Certeza - Imposibilidad.
3	1/2	2/2	Posibilidad - Certeza.
4	1/2	1/2	Composiciones idénticas.
5	0/2	1/2	Imposibilidad - Posibilidad.
6	0/8	0/3	Doble Imposibilidad.
7	1/3	2/6	Proporcionalidad.
8	2/4	3/4	Desigualdad.
9	1/2	1/3	Igualdad.
10	3/4	2/3	Desigualdades.

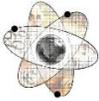
Fuente: Piaget; Inhelder (1951, p. 127).

3. Ruletas

Se inicia con el problema: “Vas a la feria y te encuentras con una caseta de juegos de ruletas. Hay dos ruletas, la ruleta A y la ruleta B (Ver figura 3). El precio de la tirada es de tres monedas y el premio es de doce monedas si la ruleta se para en la zona de color blanco. ¿Qué ruleta giraras?”. Se espera que los participantes realicen la comparación de las áreas en las ruletas, para la toma de decisiones, después de cada experimento, se espera que se haga alusión a la **frecuencia del evento** sobre el que se le cuestionó poniendo en relación **la frecuencia de ocurrencia** de un evento al girar la ruleta con el total de giros.

4. Tablero de Galtón

A partir de los datos muestrales se asigna una probabilidad a cada uno de los datos, usando las frecuencias relativas. La forma de los histogramas correspondientes permite introducir el concepto de modelo probabilístico. El modelo que aparece con más frecuencia es el definido por la curva normal. Para esta actividad se utiliza el tablero de Galtón para ilustrar un modelo probabilístico, la distribución normal.



5. Lanzamiento de una moneda

Repetir un acto a menudo es *frecuentar*. La participación personal en situaciones repetibles deriva en la experiencia. La **experiencia** deriva del recurso a la repetición de ciertas situaciones para examinar cuáles soluciones permiten. El ajuste de la conducta a las **frecuencias** de eventos implica una cierta **experiencia** individual.

Entonces “Partiremos de las **experiencias** más simples, tales como volados o lanzamientos de dados, donde todas las afirmaciones tienen un significado intuitivo obvio. Esta **intuición** se traducirá gradualmente en un modelo abstracto que poco a poco se generalizará” (FELLER, 1968, p. 3).

Para ejemplificar lo anterior, se utilizará el lanzamiento de moneda, se le pedirá a los niños anticipen la cara de la moneda ante cierto número de balanceos, posteriormente se le presentara una gráfica donde la frecuencia relativa tiende a estabilizarse, además conforme realiza el lanzamiento tienen a un número muy grande, ello alude a ley de los grandes números.

Figura 1
Dispositivo para el Estudio
de la Idea de Mezcla aleatoria



Figura 2
Problemas de decisión.
Urnas



Figura 3
Dispositivos aleatorios para
cuestionamientos sobre
medida de probabilidad



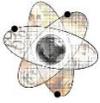


Figura 4
Tablero de Galtón
o "Quincunx"

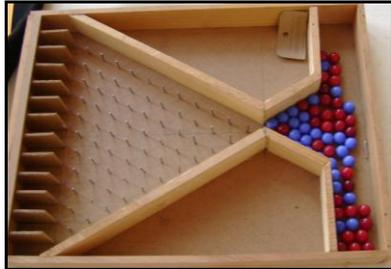
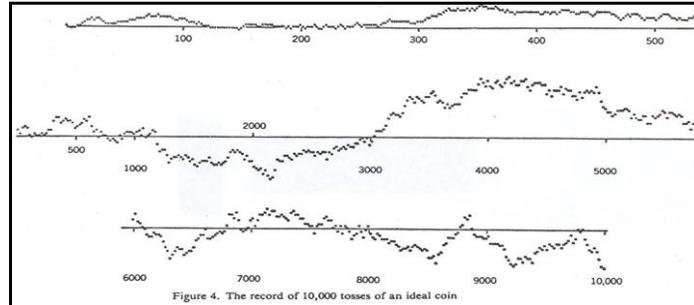


Figura 5
Registro de 10,000 lanzamiento de una moneda

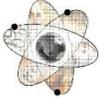


Análisis de las Actividades

El análisis se realizó considerando los cinco criterios que propone Ojeda (2006): ideas fundamentales estocásticas, otros conceptos matemáticos, recursos semánticos, términos empleados y situación y contexto. En la siguiente tabla se resume el análisis:

Tabla 2. Análisis de las Actividades bajo los cinco criterios

Criterios de Análisis	“Mezcla Aleatoria”	“Problemas de Decisión. Urnas”	Ruletas	Tablero de Galtón	Lanzamiento de una moneda
Situaciones y Contextos	Bandeja de madera, canicas de dos colores; Aula alterna.	Bolsas Oscuras, canicas de dos colores; Aula Alterna.	Ruletas de 30 cm de diámetro, con sectores de diferentes colores.	Caja de madera, canicas que ruedan con obstáculos.	Una moneda con caras de diferentes.
Ideas Fundamentales	Medida de probabilidad, Combinatoria, espacio muestra, ley de los grandes números.	Espacio muestra, medida de probabilidad, independencia.	Medida de probabilidad, espacio muestra, independencia.	Medida de probabilidad, espacio muestra.	Medida de probabilidad, independencia, registro de frecuencia.



Criterios de Análisis	“Mezcla Aleatoria”	“Problemas de Decisión. Urnas”	Ruletas	Tablero de Galtón	Lanzamiento de una moneda
Otros conceptos matemáticos	Número Naturales, Orden de los números naturales.	Números Naturales, Orden de los números naturales.	Números naturales.	Noción de cantidad.	Números naturales.
Recursos Semióticos	Lengua natural, Tablas, Figuras.	Lengua natural, signos matemáticos, tablas.	Lengua natural, secciones.	Lengua natural.	Moneda, tabla.
Términos empleados	“Revueltas”, “Caminitos”, “Posición”, “Mas posible”, “Menos posible”, “Más veces”, “Muchas, muchas veces”	“extraer”, “sacar”, “Azar”, “Más Probable”, “Menos Probable”, “Qué resultó”	Más fácil, más probable.	Distribución normal, más probable.	Probabilidad.

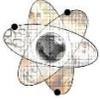
Fuente: Datos de la investigación.

Referencias

CANTORAL, Ricardo et. al. **Desarrollo del pensamiento matemático.** Editorial Trillas: D.F. México, 2003

FELLER, William. **An introduction to Probability Theory and its applications.** 3. ed., New York: Wiley International Edition, 1968. v. I.

FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht: Reidel, 1975.



HEITEL, Dietger. An epistemological view on Fundamental Stochastic Ideas. **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht: Reidel, 6(2), p. 187-205, 1975.

LÓPEZ MOJICA, José Marcos. **Estocásticos en el segundo grado de educación especial**. DME, Cinvestav del IPN.

OJEDA, Ana María. Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. In: FILLOY, Eugenio (Ed.) **Matemática Educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual**. México: Santillana, 2006. p. 257-281.

_____. Probabilidad y Estadística en Matemática Educativa. Seminario de Investigación. **Documento interno**. Manuscrito no publicado, Cinvestav - IPN, México, D.F., México, 2007.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel. **La g n se de l' d e de Hasard Chez l'enfant**. Paris: PUF, 1951.

PROGRAMA de estudios de la ENP – Escuela Nacional Preparatoria. México, 1996. (clave 1712).

STEINBRING, Heinz. **The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction**. New York: Springer, 2005.