Matemática & Ciência

A CONSTRUÇÃO DO SISTEMA DOS NÚMEROS REAIS POR WEIERSTRASS

Ana Patrícia Martins*

Resumo

Apesar de já na Antiguidade Clássica se ter reconhecido a existência de *grandezas incomensuráveis*, não seria antes do século XIX que se estabeleceriam definições rigorosas do conceito de *número irracional*, sem recurso a intuições geométricas. O conceito mais geral de número real era apenas percebido intuitivamente e a sua existência apenas assegurada por considerações de natureza geométrica e algébrica. A partir do início do século XIX surgiu uma preocupação crescente em colocar a Análise sobre bases aritméticas sólidas; reconhecia-se que a falta duma teoria dos números reais tornava incorretas (ou, pelo menos, incompletas) as demonstrações de certos resultados. Desta forma, uma etapa importante do processo de *aritmetização da Análise* seria a elaboração duma teoria da reta real sobre fundações puramente aritméticas. Dos três nomes que devem referenciar-se neste contexto – Charles Méray, Karl Weierstrass e Richard Dedekind – destacaremos o de Weierstrass que, contrariamente aos outros dois, não se limitou a construir os reais a partir duma pressuposta construção dos racionais. Weierstrass parte da noção mais geral de *número* e das operações fundamentais da Aritmética; introduz inicialmente o con-ceito de número natural e, de seguida, o de número racional positivo; considerando "agregados" destes números obtém então grandezas para além das racionais. Por esta razão, na teoria dos números reais de Weierstrass, não se podem dissociar as naturezas dos números naturais, racionais e reais. Weierstrass constrói a sua teoria de modo inteiramente analítico, dotando-a dum rigor muito característico de toda a sua obra matemática e elaborando a teoria dos números reais mais completa do século XIX.

Palavras-chave: Aritmetização da Análise; construção dos números reais; Weierstrass.

* Escola Superior de Educação de Viseu/Instituto Politécnico de Viseu.
E-mail: anapatmartins@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.5752/P.2674-9416.2019v2n1p110-162

Introdução

O auge da atividade profissional docente de Karl Weierstrass culminou com o convite como professor da Universidade de Berlim, no ano de 1856. Os prestigiados cursos de matemática que lecionou até ao semestre de verão de 1887 atraíram estudantes de toda a Europa, entre eles, Georg Cantor, Sofia Kovalevskaya, Leo Königsberger ou Gösta Mittag-Leffler. Segundo Pierre Dugac, os esforços conjugados, quer de Weierstrass, quer de outros dois seus colegas, Ernst Eduard Kummer e Leopold Kronecker, deram à Universidade de Berlim a reputação de líder mundial em estudos matemáticos, na época (DUGAC, 1973, p. 62).

Nos cursos que lecciona em Berlim, Weierstrass aborda os fundamentos da Análise e sente necessidade de construir uma teoria dos números reais, uma vez que não dispunha de nenhuma que fosse correcta. A matéria leccionada nestes cursos distribui-se por quatro grandes temas: teoria das funções analíticas, teoria das funções elípticas, aplicações das funções elípticas à geometria e à mecânica, e ainda teoria das funções abelianas. A teoria weierstrassiana dos números reais é apresentada como introdução ao primeiro desses temas, constituindo, pois, a base de todo o edifício matemático desses cursos.

Weierstrass não redigia as suas lições; inclusivamente, para aperfeiçoar cursos que foi repetindo ao longo dos anos, socorria-se de apontamentos redigidos por alunos seus[1]. Neste sentido, podemos entender que Dugac refira que tanto Weierstrass, como o seu colega Kronecker, apresentavam nas suas lições os resultados das suas pesquisas e, contrariamente ao que se fazia habitualmente na Alemanha, evitavam imprimir os seus trabalhos[2]. Para que possamos ter acesso às teorias de Weierstrass, é necessário analisar redações dos seus cursos feitas alunos, o que, evidentemente, retira alguma da credibilidade que proporcionaria uma análise da obra original. Em todo o caso, tal como já foi apontado, o próprio matemático apoiou-se em algumas dessas versões para aperfeiçoar cursos que lecionaria mais tarde, o que, de algum modo, será um indicador de que estes textos são representativos das suas concepções matemáticas[3]. Note-se, no entanto, que se existem algumas destas redações que merecem todo o crédito (tal como é apontado por Dugac[4], as de Adolf Hurwitz, G. Hettner, ou ainda Salvatore Pincherle), existem outras que o próprio

[1] Dugac, (1973, p. 60).
[2] *Id.*, *ibid.*, pp. 60, 61.
[3] É curioso notar inclusivamente que, não fossem estas notas dos alunos ajudarem a que as suas lições se tornassem, ano após ano, mais acessíveis, e talvez a popularidade dos seus cursos de Berlim não tivesse sido tão grande: *Id.*, *ibid.*, p. 60. Isto porque, segundo o relato de L. Kiepart, aluno de Weierstrass, a única forma de obter algum registo dos cursos iniciais, era anotando-os por esteno-grafia, sem qualquer preocupação com a sua compreensão; mesmo assim, o número de alunos caiu de pouco mais de uma centena para sete, existindo entre estes alguns que tinham a impressão de não terem compreendido o curso.
[4] *Id.*, *ibid.*, pp. 68 e 78.

Weierstrass "condena", como a de Otto Biermann, ou relativamente às quais mantém algumas reservas, como a de E. Kossak[5].

Weierstrass inicia o estudo sobre os fundamentos da análise com o *Curso de Inverno* de 1859-1860, *Introdução à Análise*. A redação que Hermann Amandus Schwarz compôs do curso *Cálculo Diferencial*, do semestre de verão de 1861, atesta que o matemático já tinha nesse ano um modelo para a construção dos números irracionais – as séries[6]. Refira-se, no entanto, que estas séries não se podem identificar com as séries usuais: tendo como base a noção de conjunto, permitem que seja aplicada a propriedade comutativa na obtenção das suas somas. Mas é somente no ano de 1863 que podemos situar a primeira teoria dos números irracionais de Weierstrass: o início dessa construção ocorre quando lecciona o curso *Teoria Geral das Funções Analíticas* no semestre de inverno de 1863-1864. Foi inspirado numa parte deste curso, repetido dois anos mais tarde no semestre de inverno de 1865-1866, que Kossak escreveu o seu livro *Os Elementos da Aritmética*, publicado em 1872, onde podemos encontrar a primeira exposição impressa da teoria weierstrassiana dos números reais.

A exposição seguinte desta teoria pode ser encontrada na redação de Hettner do curso *Introdução à Teoria das Funções Analíticas* de 1874[7]. Seguem-se as de Pincherle e de Hurwitz (1878) do mesmo curso, leccionado no semestre de verão de 1878, que, a julgar pelos comentários de Dugac[8], podem considerar-se bastante representativas da obra de Weierstrass. A de Hurwitz era apreciada e mesmo utilizada pelo matemático, provavelmente para melhorar os seus cursos ao longo dos tempos[9]. Outras duas exposições da teoria *weierstrassiana* dos números reais foram compostas por Victor Dantscher[10] e G. Thieme[11], respeitantes, respectivamente, ao curso do semestre de inverno de 1884-1885, também sobre funções analíticas, e ao último curso de análise leccionado por Weierstrass na Universidade de Berlim, no semestre de verão de 1886, intitulado *Capítulos Seleccionados da Teoria das Funções.*

Pelas razões expostas, escolhemos a redação de Adolf Hurwitz do curso *Introdução à Teoria das Funções Analíticas,* de 1878, como base desta exposição da teoria dos números reais de Weierstrass.

Devemos esclarecer que na teoria de Weierstrass não podemos dissociar o estudo das construções dos diferentes sistemas numéricos dos números naturais, racionais ou

[5] *Id., ibid.*, pp. 83 e 68, respectivamente.
[6] Schwarz (1861).
[7] Hettner (1874).
[8] Dugac (1973, p. 78, 79).
[9] *Id., ibid.*, p. 96, nota de rodapé 2.
[10] Exposta em Dantscher (1908). No entender de Dugac esta obra responde às diferentes críticas dirigidas à teoria weierstrassiana dos números reais, sobretudo a de Gottlob Frege: (DUGAC, 1973, p. 83.),
[11] Exposta em Thieme (1886). "[...]não tem de todo a clareza e a ordem da de Hurwitz, nem mesmo daquela de Hettner, e a estrutura dos capítulos, das proposições e dos teoremas não é bem tida em conta.": (DUGAC, 1973, p. 86).

reais. Inicialmente, é introduzido o conceito de *número usual* ou *número inteiro*, definido como sendo um conjunto de unidades, e que corresponde a um número inteiro positivo. Um número que seja constituído por unidades de diferentes tipos é designado por *número complexo*. E é à custa destes dois tipos de números e das *partes exatas da unidade*, que correspondem aos números fracionários positivos da forma $1/n$, que se constróem as *grandezas numéricas*. Os *números usuais mistos* (correspondentes aos racionais positivos) serão então um tipo destas grandezas, a saber, aquelas compostas por um número finito de elementos. De igual modo, os números irracionais positivos serão definidos como um tipo de grandezas numéricas, a saber, aquelas constituídas por uma infinidade de elementos. Será por esta razão que o modelo dos números irracionais da construção de Weierstrass é a série infinita. Finalmente, através do conceito de *elemento oposto* de um qualquer número (inteiro ou racional), Weierstrass cria o conjunto dos números negativos, pelo que, estendendo sucessivamente aos novos números todas as operações aritméticas, acaba por completar o conjunto dos números reais.

Dada a própria natureza desta construção do conjunto dos números reais, feita por sucessivas extensões de conceitos a novas entidades, é compreensível que apenas no final da sua apresentação possamos ver justificadas todas as ideias desenvolvidas ao longo da sua exposição.

Se bem que a redação de Hurwitz (1878) seja a que suporta esta apresentação da teoria *weierstrassiana* dos números reais, são mencionadas também algumas abordagens diferen-tes, nomeadamente, nas redações de Hettner (1874) e de Thieme (1886). E é exatamente na última delas que encontramos expressa da forma mais clara a ideia de que a noção de limite não pode surgir na definição dos números reais. Weierstrass reconhece o erro que alguns matemáticos haviam cometido na definição de um número irracional: "Se se partir da existência de grandezas numéricas racionais, então não tem sentido definir os irracionais como limites dos mesmos, porque começamos por não poder saber se ainda haverá outras grandezas numéricas além das racionais."[12].

Sendo as séries o modelo de construção dos números irracionais, Weierstrass contorna esta questão definindo um número real, não como a soma de uma série (ou seja, um limite), mas como a própria série (isto é, um agregado de elementos). Tal série, como já foi referido, não pressupõe, no entanto, uma ordenação dos seus termos.

1. Números usuais e números complexos

A apresentação que faremos da teoria *weierstrassiana* dos *números usuais*, isto é dos números inteiros positivos, irá permitir que desde já nos habituemos à presença constante de resultados da teoria de conjuntos.

[12] Thieme (1886, p. 59).

A introdução do curso *Introdução à Teoria das Funções Analíticas* é iniciada com a noção de *número*, cuja ideia de ser um agregado de unidades é a mesma que podemos encontrar no sétimo livro dos Elementos de Euclides[13]. Aliás, na teoria dos números irracionais de Weierstrass, os resultados da teoria de conjuntos são uma constante. São também utilizadas as designações de *número usual*, *número inteiro* e *número inteiro usual*[14]. Por oposição, um número que possa admitir diferentes *unidades* é designado de *número complexo*.

Definição 1.1 "O conceito de número surge através da reunião mental de coisas, nas quais se descobriu uma característica comum, especialmente de coisas mentalmente idênticas. Designamos essa coisa como a unidade do número."[15]

Definição 1.2 "Por um número complexo entendemos o agregado de números de diferentes unidades [...]. A estas diferentes unidades damos o nome de elementos do número complexo."[16]

A importância dos números complexos apenas será notada com a definição de *grandeza numérica*, conceito basilar das definições dos números racionais e dos números irracionais abordado na secção 2. *Partes exatas da unidade e números usuais mistos*.

Dada a própria natureza das definições de número usual e de número complexo, as possíveis relações e operações entre cada um destes tipos de números reduzem-se a relações entre elementos de conjuntos.

Definição 1.3 "Ora dizemos que 2 coisas a e b são iguais uma à outra, quando existe uma associação ou relação entre elas, que se designa por $a = b$, tal que também é $b = a$ e que se $a = b$ e $b = c$, também é $a = c$."[17]

Segundo a definição anterior, a relação de igualdade entre dois números quaisquer é simétrica e transitiva. Tendo em conta que também será, obviamente, reflexiva, podemos interpretar a relação de igualdade de dois números usuais ou complexos como uma relação de equivalência.

Segue-se uma definição mais particular para a igualdade de *números usuais*.

Definição 1.4 "Ora podemos dizer que dois números usuais a e b são iguais um ao outro quando, ao coordenarmos a uma unidade de a uma unidade de b, a outra unidade de a

[13] Euclid (1956, p. 277).
[14] Hurwitz (1878, p. 1, 6 e 8).
[15] *Id.*, *ibid.*, p. 1.
[16] *Id.*, *ibid.*.
[17] *Id.*, *ibid.*,

uma outra de *b*, e assim por diante, cada unidade de *a* encontra uma correspondente de *b*, e portanto não sobra nenhuma unidade de *a* nessa coordenação."[18]

Numa linguagem atual, diríamos que dois números usuais *a* e *b* são iguais se existir uma correspondência bijetiva entre as unidades de cada um deles. Relativamente à igualdade de números complexos, definida mais adiante (após a introdução do conceito de grandeza numérica) faz-se apenas a seguinte observação:

> Seria muito limitativo se apenas disséssemos que 2 números complexos são iguais um ao outro quando um elemento arbitrário ocorresse num deles tantas vezes quantas no outro, pois podem ocorrer relações entre os elementos dum número complexo. (HURWITZ, 1878, p. 2-3).

Vejamos um exemplo: os números complexos compostos, um deles por 100 unidades de 1 cêntimo, e o outro por 1 unidade de 1 euro são iguais, atendendo à relação existente entre os elementos cêntimo e euro do número complexo. A definição geral de igualdade, 1.3, revela pois algumas limitações.

No caso de não existir uma correspondência bijetiva entre as unidades de dois números usuais *a* e *b*, é introduzido o conceito de *desigualdade.*

Definição 1.5 Se, na correspondência estabelecida entre as unidades de dois números usuais *a* e *b*, existir alguma unidade de *a* que não tenha uma correspondente de *b*, diz-se que *a* é maior do que *b*, e escreve-se $a > b$, ou *b* é menor do que *a*, e escreve-se $b < a$.

A noção de *reunião* entre conjuntos é a base da definição da operação *adição* entre dois quaisquer números. Assim, as unidades que compõem a soma de dois números provêm da reunião das unidades dos números dados.

Definição 1.6 "Por soma de dois números *a* e *b*, que podem ser números usuais ou complexos, entendemos o número que surge através da associação conceptual das uni-dades do número *b* com as do número *a*."[19]

Sem quaisquer considerações, que apenas se referem à teoria dos conjuntos, segue a apresentação de duas propriedades da operação adição relativa a números usuais: $a + b = b + a \;\; e \;\; (a + b) + c = (a + c) + b$, a partir das quais deduz ainda que a adição de tantos números quantos se queira é independente da ordem pela qual a adição se efetua[20].

[18] *Id.*, *ibid.*, p. 1-2.
[19] *Id.*, *ibid.*, p. 1
[20] *Id.*, *ibid.*, p. 2.

A operação de *subtração* entre números usuais só é considerada para diferenças que sejam ainda números usuais. Deste modo, Weierstrass opta por construir inicialmente conjuntos de números positivos.

Definição 1.7 "Se c for um número (usual), então ele pode encarar-se como soma dum número dado a e dum número procurado b. Designa-se então b, como surgindo de c e a, por $(c - a)$. $(c - a)$ é portanto o número que, adicionado a a, dá c como resultado. Por agora, o símbolo $(c - a)$ só tem significado quando é $c > a$."[21]

Caso os números a e c sejam tais que $c > a$, chegamos, segundo as palavras de Weierstrass, a algo imaginário.

A definição da operação de *multiplicação* entre quaisquer números denota mais uma vez a relação bastante próxima entre esta teoria dos números reais e a teoria dos conjuntos.

Definição 1.8 "Por ab entendemos aquele número que, quando b é considerado como unidade, consiste de a tais unidades (b). A operação de, a partir de a e b, encontrar o número ab, chama-se multiplicação."[22]

As propriedades

(I) $ab = ba$ (II) $(ab)c = (ac)b$ e (III) $(a + b)c = ac + bc$

seguem, afirma-se, da própria definição desta operação.

É curioso observar a argumentação utilizada na prova de que, quando a operação de multiplicação satisfaz as propriedades anteriores, a partir de dois quaisquer números inteiros usuais a e b, se pode sempre encontrar o número ab. O mesmo será dizer que a operação de multiplicação é uma aplicação. A justificação apresentada envolve, mais uma vez, apenas algumas ideias da teoria dos conjuntos. Das propriedades (I) e (III) é deduzida a igualdade

$$(a + b + c + \cdots)(a' + b' + c' + \cdots) = aa' + ab' + ac' + \cdots + ba' + bb' + bc' + \cdots + ca' + cb' + cc' + \cdots$$

Uma vez que os elementos constituintes de a e b são a unidade,

> [...] resulta que ab pode representar-se como soma duma certa quantidade de símbolos 1.1. Mas a este símbolo mesmo pode ainda atribuir-se um significado arbitrário, pois ele não pode cindir-se mais. Se lhe atribuirmos o valor

[21] *Id.*, *ibid.*, p. 3.
[22] *Id.*, *ibid.*

> 1 (a unidade), então a operação indicada por *ab* está agora completamente determinada.[23]

Note-se que esta prova postula que $1 \cdot 1 = 1$, igualdade esta que se revelará fundamental na definição da operação de multiplicação de partes exatas da unidade, apresentada na secção 2.2 *Operações com números usuais mistos.*

A operação multiplicação apenas será definida para esses números mais adiante, após a consideração das grandezas numéricas.

À semelhança do que sucedeu com a subtração, também a definição operação *divisão* entre quaisquer números irá recorrer à operação da qual é inversa, a multipli-cação.

Definição 1.9 "É natural perguntar se um dado número c pode ser produzido através da multiplicação dum número dado *a* por um [número] procurado *b*. Denota-se o número *b* por c/a."[24]

Através da observação de que este símbolo *c/a* só tem um significado real quando *c* é um múltiplo de *a* (isto é, quando ocorre no domínio numérico que tem o número *a* como unidade), é referida a necessidade da introdução de novos elementos. Desta forma, a operação de divisão aplicada a números usuais assume um papel bastante importante na construção dos números racionais, uma vez que exige a criação de novas entidades, os números fracionários.

Relativamente às operações definidas para números usuais, é de notar que, se para o caso da operação inversa de subtração foi imposta a condição de que a diferença de dois números usuais fosse ainda um número usual, no caso da divisão já é permitido o cálculo do quociente entre dois quaisquer números, não sendo, portanto, um deles necessariamente múltiplo do outro. Assim, se para a primeira destas operações não se ampliou o conjunto dos números já existente, incluindo-se, eventualmente, os números negativos, o mesmo não sucedeu para a divisão. De fato, para construir o conjunto dos números reais, Weierstrass define inicialmente conjuntos de números positivos: inteiros, racionais e reais, e apenas no final da sua teoria considera os correspondentes números simétricos, definidos à custa do conceito de *elemento oposto*.

2. Partes exatas da unidade e números usuais mistos

A construção do conjunto dos números racionais positivos assenta sobre o conceito de *parte exata da unidade* que corresponde a um número fracionário positivo da forma 1/n. Combinações lineares finitas de coeficientes inteiros positivos destas partes exatas da unidade definirão os *números usuais mistos*, ou seja, os números racionais positivos.

[23] *Id.*, *ibid.*, p. 9.
[24] *Id.*, *ibid.*, p. 3.

Definição 2.1 Uma parte exata da unidade, *1/a*, é um elemento, dos quais há *a* no elemento principal, a unidade.

Proposição 2.1 a) Partes exatas das partes exatas da unidade são igualmente partes exatas da unidade.
b) Em geral, a $(m.n)^a$ parte exata da unidade, isto é $\frac{1}{m.n}$, tem de ser a m^a parte exata de $\frac{1}{n}$ e reciprocamente também a n^a parte exata de $\frac{1}{m}$.

Através do exemplo de que a 4^a parte exata da 5^a parte exata da unidade é a $(4.5)^a$ parte exata da unidade[25], percebemos qual seria a demonstração (omissa) da proposição anterior. Segue-se a justificação. Sendo $\frac{1}{4.5}$ a $(4.5)^a$ parte exata da unidade, tem-se, por definição,

$$\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{4.5}(4.5 \text{ tais parcelas})=1$$

ou

$$\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}\right)(5 \text{ tais parcelas})=1$$

Mas, por outro lado, $\frac{1}{5}$ é a 5^a parte exata da unidade, donde cinco tais elementos são equivalentes à unidade. Portanto $\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{4.5}$ tem de ser equivalente a $\frac{1}{5}$, o que significa que $\frac{1}{4.5}$ tem de ser a 4^a parte exata de $\frac{1}{5}$.

Um número complexo composto destes novos elementos e da unidade principal diz-se uma *grandeza numérica*.

Definição 2.2 "A partir de agora, entenderemos por grandeza numérica qualquer número complexo cujos elementos são a unidade e as suas partes exatas, de que há infinitas."[26]

É pois claro que uma grandeza numérica pode conter quer uma quantidade finita, quer uma quantidade infinita de elementos.

Na redação de Adolf Hurwitz é incluída uma secção intitulada *Grandezas numéricas formadas de infinitos elementos.* Depreendemos então que as considerações acerca de grandezas numéricas anteriores a tal parte do curso de Weierstrass se referem a grandezas compostas de um número finito de elementos, se bem que tal não seja dito explicitamente.

[25] *Id.*, *ibid.*, pp. 4, 5.
[26] *Id.*, *ibid.*, p. 4.

A identificação entre grandezas com um número finito de elementos e os números racionais positivos é bem clara na redação que Thieme faz do curso *Capítulos Seleccionados da Teoria das Funções Analíticas*, leccionado por Weierstrass no ano de 1886. Em todo o caso, deve ter-se em consideração que a terminologia de grandeza numérica racional se refere aí quer a um racional positivo, quer a um racional negativo, contrariamente à redação de Hurwitz onde apenas são considerados inicialmente números positivos.

> Começamos por definir uma grandeza numérica racional como uma grandeza composta por uma quantidade finita de elementos; daí segue que a podemos representar como um múltiplo de uma parte positiva ou negativa da unidade principal.[27]

A redação de Thieme pode mesmo encontrar-se a designação *número racional*, acontecendo o mesmo na que Hettner compôs relativamente ao curso *Introdução à Teoria das Funções Analíticas*, que Weierstrass lecionou no ano de 1874[28]. Em todo o caso, segundo as abordagens aí utilizadas, tal terminologia aplica-se quer a números racionais positivos, quer a números racionais negativos. Isto decorre do fato de nestas redações os números negativos serem definidos também no início da construção dos sistemas numéricos, e, portanto, toda a teoria desenvolvida se aplicar igualmente a essas novas entidades. Na redação de Adolf Hurwitz, podemos apenas encontrar as designações de *números usuais mistos*, ou simplesmente *números mistos*[29], para denominar os racionais positivos, por analogia aos *números usuais* que são agregados de apenas um elemento – a *unidade* do número. No que se segue, adoptaremos frequentemente a terminologia de *número usual misto* para nos referirmos a grandezas compostas de uma quantidade finita de elementos. Desta forma, evitaremos confusões que, pelo exposto, se associam à termi-nologia *grandeza numérica*.

Podemos pois entender que o conceito de grandeza numérica se revela fundamental na construção do conjunto dos números racionais, sucedendo o mesmo, tal como veremos mais adiante, para a construção do conceito de número irracional.

2.1 Comparação de números usuais mistos

[27] Thieme (1886, p. 59-60).
[28] Hettner (1874, p. 36).
[29] Hurwitz (1878, p. 6 e 8).

A igualdade de dois números usuais mistos "socorre-se" de duas transformações que podemos efetuar sobre tais grandezas numéricas[30]:

1) Quaisquer n elementos $\frac{1}{n}$ podem ser substituídos pela unidade principal.

2) Qualquer elemento pode ser substituído pelas suas partes exatas.

Como exemplo de tais operações, é indicada a substituição de 1 por $n.\frac{1}{n}$ ou ainda a de $\frac{1}{a}$ por $b.\frac{1}{a.b}$, justificada pela aplicação da proposição 2.1.

Definição 2.3 Dois números usuais a e b dizem-se iguais quando, através das transformações indicadas, *a* puder ser transformado num outro número *a'* que contenha os mesmos elementos que *b* e tantas vezes como *b*.

Para definir o conceito de desigualdade, recorre-se à ideia da divisão da maior das grandezas em duas outras.

Definição 2.4 "Mas se se puder transportar *a* através de transformações em *a'*, *a''*, onde *a'* contém os mesmos elementos tantas vezes como *b*, mas *a''* representa ainda outra grandeza numérica, então dizemos $a > b$ ou $b < a$."[31]

Os elementos da teoria dos números ensinam como se realiza, na prática, a comparação das grandezas numéricas *a* e *b* através de transformações.[32]

Antes mesmo de explicar como proceder para efetuar tal comparação, Weierstrass refere-se à comparação de números usuais, para a qual utiliza os conceitos de *divisor comum* e *máximo divisor comum*. Já a comparação de números usuais mistos terá por base os conceitos de *múltiplo comum* e *menor múltiplo comum* entre um conjunto de números usuais, cujas definições se depreendem da redação seguinte

> [...] para quaisquer números inteiros $a_1, a_2, \dots, a_n$, existem sempre múltiplos comuns. Quer dizer, números *c*, que são um múltiplo de cada um dos números $a_1, a_2, \dots, a_n$, e em especial [existe] um número c_1 cujos múltiplos são todos os números *c*. Chama-se a c_1 o menor múltiplo comum dos números $a_1, a_2, \dots, a_n$.[33]

Sejam então $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots; \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots$ os elementos que compõem as grandezas *a* e *b*. Caso *c* seja o menor múltiplo comum dos números $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, esta grandeza *c* pode ser

[30] *Id.*, *ibid.*, p. 5.
[31] *Id.*, *ibid.*, p. 5.
[32] *Id.*, *ibid.*, p. 6.
[33] *Id.*, *ibid.*.

escrita nas múltiplas formas $\alpha_1 a_1 = c, \alpha_2 a_2 = c, \ldots \beta_1 b_1 = c, \beta_2 b_2 = c, \ldots$. Assim, em vez de cada elemento $\frac{1}{\alpha_n}$, pode pôr-se

$$\alpha_n \frac{1}{\alpha_n a_n} = \alpha_n \text{ elementos } \frac{1}{c} .$$

As grandezas numéricas *a* e *b* são então transformadas noutras que apenas possuem o elemento $\frac{1}{c}$. Desta forma, a sua comparação torna-se exequível: caso *a* e *b* possam ser transformadas de modo a que tenham tantos elemento $\frac{1}{c}$ uma como a outra, elas são (por definição) iguais; caso contrário, são desiguais.

2.2 Operações com números usuais mistos

A definição da operação de adição de números usuais mistos é apenas uma extensão da adição de números usuais.

Definição 2.5 A soma, $a+ b$, de dois números usuais mistos *a* e *b*, obtém-se se aos elementos de *a* acrescentarmos um elemento de *b*, depois um segundo elemento de *b*, e assim por diante até todos os elementos de *b* se esgotarem.

Argumentos relativos teoria dos conjuntos são apresentados na prova das seguintes leis para números usuais mistos:

(I) $a + b = b + a$ e (II) $(a + b) + c = (a + c) + b$.

Esclarece-se que a ordem pela qual se adicionam tantas destas grandezas numéricas, quantas se queira, continua a não influenciar o resultado final e observa-se, finalmente, que “A adição é uma operação unívoca; a saber, se no lugar de b, em $a + b$, se puser outro número $b_1 > b$, então a soma também se torna noutra.”[34].Com efeito, *b* pode transformar-se em *b’* e b_1 em *b’*+*b’’*, donde $a + b_1 > a + b$.

Sendo os números usuais mistos números complexos, cujas unidades são a unidade e as suas partes exatas, e uma vez que $1 \cdot 1 = 1$, resta dar um significado para o produto de partes exatas da unidade: “Temos pois de dizer relativamente às nossas grandezas numéricas (números mistos), o que entendemos por $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$. Mas este significado não é arbitrário, se estabelecermos que unidade vezes unidade deve ser novamente unidade.”[35].

[34] *Id.*, *ibid.*, p. 8.
[35] *Id.*, *ibid.*, p. 9.

Partindo do princípio que a operação de multiplicação entre partes exatas da unidade deva verificar as leis (I) e (III) (e portanto, também (III')) da multiplicação de números usuais[36], vem que:

$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+m \text{ parcelas}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+n \text{ parcelas}\right)=1$$
$$=\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}+\cdots\right)$$

Mas isto significa que *m.n* membros $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}$ são equivalentes à unidade. Logo, $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}$ é a (*m.n*)ª parte exata da unidade.

Apesar de não ser apresentada uma definição explícita do produto de duas partes exatas da unidade, podemos, a partir do anteriormente exposto, propor a redação seguinte.

Definição 2.6 O produto da *m*ª parte exata da unidade, $\frac{1}{m}$, pela *n*ª parte exata da unidade, $\frac{1}{n}$, é a (*m.n*)ª parte exata da unidade, $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}$, isto é, $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{mn}$.

A observação seguinte esclarece como proceder para efetuar o produto entre números usuais mistos: “ [...] se *a* e *b* forem duas grandezas numéricas arbitrárias, que sejam compostas dos elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, então a multiplicação é agora exequível pelas leis I) – III) e pelo significado de $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}$.”[37]

Desta forma, muito embora não seja explicitamente formulado o conceito de produto de dois números usuais mistos, isto é, de duas grandezas numéricas compostas de um número finito de elementos, podemos, mais uma vez, propor uma redação.

Definição 2.7 O produto, $a \cdot b$, de dois números usuais mistos arbitrários é igual à soma de todos os produtos possíveis entre os elementos de *a* e *b*.

Veremos na secção 3.2.2 *Operações com números finitos* que esta definição é estendida ao outro tipo de grandezas numéricas, aquelas compostas de infinitos ele-mentos. Por essa razão somente poderemos ver justificados certos resultados relativos a números usuais mistos como, por exemplo, o fato de o produto de dois quaisquer números usuais mistos ter um valor unívoco completamente determinado (caso particular da mesma propriedade relativa a grandezas com uma infinidade de elementos).

[36] Veja-se secção 1. *Números usuais – neste artigo.*
[37] Hurwitz (1878, p. 10).

A multiplicação de dois números usuais mistos quaisquer verifica também as propriedades (I), (II) e (III) da operação multiplicação de números usuais. A prova de tal fato decorre de os números usuais mistos serem compostos de elementos, a unidade e as suas partes exatas, que igualmente verificam as leis (I), (II) e (III)[38] .

Até este ponto da construção de domínios numéricos, apenas foi definido o conjunto dos números racionais positivos, *números usuais mistos*, estando este munido das operações de adição e multiplicação.

3. Números com infinitos elementos

Números com infinitos elementos é o título, na redação de Hurwitz, da secção onde é desenvolvida toda a teoria dos números reais, sendo inicialmente apresentada a teoria relativa aos reais positivos, e só com o conceito de *elemento oposto* se generalize esta aos reais negativos.

Um dos pontos fundamentais para a construção do conceito de número real é estabelecer uma forma que nos permita distinguir os números racionais dos que não o sejam, isto é, dos números irracionais. A forma como Weierstrass definiu, de um modo puramente aritmético, a diferença entre estes dois tipos de números está bastante explícita na redação de Thieme: (Thieme, 1886). Portanto, no que se segue, consideram-se algumas passagens mais significativas de tal redação.

O conceito mais geral de número que apresentamos até ao momento foi o de *número usual misto*, correspondente a um racional positivo, e que coincide com uma grandeza numérica composta por uma quantidade finita de elementos. Mas as grandezas numéricas podem conter igualmente uma infinidade de elementos. Observando que existem grandezas deste último tipo que não são equivalentes a nenhum racional, Weierstrass conclui que o conjunto dos números não fica completo com os números racionais. Razão pela qual surja a necessidade de criar novos números.

> Se considerarmos por exemplo o número *e*, que é composto dos elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n!}, \dots,$ então esta é uma série bem definida, que define uma grandeza completamente determinada; igualmente Hermite conseguiu mostrar que não há nenhuma grandeza numérica racional que lhe seja igual pela definição a-

[38] É de notar que, para definir o produto entre partes exatas da unidade, foi assumida a validade das propriedades (I) e (III). A propriedade (II) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, onde α, β, γ são partes exatas, demonstra-se facilmente atendendo às definições de multiplicação destes elementos e à validade da mesma lei (II) para a multiplicação de números usuais.

> presentada; daí segue que o domínio das grandezas não se esgota com os números racionais. (THIEME, 1886, p. 59) [39]

As grandezas numéricas que podemos de alguma forma comparar são as que possuem um valor finito. Weierstrass chama *números finitos* a estas grandezas que correspondem exatamente a todos os números reais positivos. Será portanto relativa-mente a essas entidades que desenvolve as leis aritméticas, sendo apenas abordadas inicialmente as da adição e multiplicação. Com a introdução do conceito de elemento oposto, essa álgebra é estendida aos reais negativos e, finalmente, com a definição de divisão de dois quaisquer números, fica completo o conjunto dos reais.

3.1 Grandezas numéricas formadas de infinitos elementos

> Para que se possa fazer uma ideia exata de tais grandezas numéricas com infinitos elementos, é preciso que estes elementos sejam seleccionados, por uma lei definida, do domínio numérico [construído] até agora (unidade e partes exatas da mesma).[40]

A série geométrica

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3\cdot 3}+\cdots.$$

é indicada como exemplo de tais entidades. No entanto, este é apenas um exemplo do caso excepcional de uma grandeza constituída por uma infinidade de elementos que é equivalente a um número racional, existindo, evidentemente, casos em que somas destas não são iguais a nenhum racional. Torna-se pois necessário desenvolver conceitos que se apliquem a todo o tipo de grandezas numéricas.

3.1.1 Comparação de números com infinitos elementos

As transformações sobre grandezas numéricas compostas de um número finito de elementos, definidas na secção 2.1 *Comparação de números usuais mistos*, permanecem ainda válidas no caso de estas entidades serem compostas de uma infinidade de elementos. Assim, poderemos igualmente substituir quaisquer n elementos $\frac{1}{n}$ pela unidade prin-

[39] A demonstração de que, sendo x um número inteiro, a exponencial e^x não pode tomar um valor comensurável, pode ser consultada em Hermite (1912, p. 154).

[40]

cipal, ou mesmo substituir qualquer elemento pelas suas partes exatas. Já relativamente à relação de *igualdade*, afirma-se:

> [...] não conseguiríamos chamar iguais uma à outra a duas grandezas numéricas, apenas quando ambas podem transformar-se numa mesma terceira, porque uma tal grandeza numérica de infinitos elementos não pode em geral trazer-se a uma forma que só contenha uma unidade (infinitos números não têm nenhum múltiplo comum finito em geral. (HURWITZ, 1878, p. 11).

Para ultrapassar este obstáculo, é introduzido o conceito de *parte integrante* de uma grandeza numérica.

Definição 3.1 *a'* é uma parte integrante de *a* quando *a'* puder ser transformado em *a''* de tal modo que todos os elementos de *a''* ocorram tantas vezes em *a* como em *a''* e, além disso, *a* contiver outros elementos ou o mesmo em maior quantidade.

A respeito desta definição, Weierstrass observa que uma parte integrante *a'* de um número *a* com infinitos elementos apenas poderá conter uma quantidade finita de elementos de *a*; com efeito, somente podemos estabelecer uma relação entre o número de ocorrências dos elementos de *a''*, quer em *a* como em *a''*, se este for um número finito. A partir deste conceito, são definidas as relações de igualdade e desigualdade entre duas quaisquer grandezas numéricas.

Definição 3.2 Duas grandezas numéricas *a* e *b* dizem-se iguais quando qualquer parte integrante de *a* pode, através de transformações, tornar-se numa de *b* e, reciprocamente, cada parte integrante de *b* numa de *a*.

As propriedades de simetria e transitividade da relação de igualdade entre qualquer tipo de grandezas numéricas são enunciadas sem prova[41]. Atendendo a que também será válida a propriedade reflexiva, poderemos interpretar a relação de igualdade entre duas quaisquer grandezas como uma relação de equivalência.

Definição 3.3 Diz-se que $b > a$ quando qualquer parte integrante de *a* pode transformar-se numa de *b* mas não reciprocamente.

Mostra-se ainda que no caso de duas grandezas numéricas cumprirem a relação $b > a$, um número *c'* que esteja contido em apenas um dos números só poderá estar contido em *b*. Isto porque, se assim não sucedesse, a definição de desigualdade entre grandezas

[41] *Id.*, *ibid.*, p. 15.

numéricas não teria nenhum sentido. Esta prova decorre facilmente de argumentações relativas à teoria dos conjuntos.

A propriedade transitiva da relação de desigualdade entre qualquer tipo de grandezas numéricas é enunciada sem prova[42].

3.1.2 Exemplos de grandezas com infinitos elementos equivalentes a números racionais

Utilizando o conceito de *parte integrante* de uma grandeza numérica, determinam-se somas de séries[43], exemplificando-se assim que existem grandezas numéricas compostas de infinitos elementos que são equivalentes a números racionais. Inclusivamente, podemos ler na redação de Thieme que Weierstrass considera como uma exceção quando uma grandeza numérica formada por uma quantidade infinita de elementos é equivalente a uma grandeza numérica racional[44]. A partir do mesmo conceito de parte integrante, é provada ainda, na redação de Hurwitz, a igualdade entre duas grandezas numéricas com uma infinidade de elementos.

Exemplo 3.1: Vejamos a prova de que o número $a \equiv \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$ é igual a 1.

Atendendo à definição 3.2 de *igualdade* de duas grandezas numéricas, demonstre-se inicialmente que toda a parte integrante de *a* é parte integrante de 1. São estabelecidas inicialmente as relações:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2} = 1; \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}; \frac{1}{4} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n},$$

a partir das quais se obtém o número 1:

$$(3.1) \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = 1.$$

Representando *c* uma parte integrante arbitrária do número *a*, a argumentação segue considerando $\frac{1}{r(r+1)}$ o elemento “mais alto”, isto é, de ordem mais alta, de *a* que está contido em *c*. Então tem-se:

$$c \leq \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)},$$

[42] *Id.*, *ibid.*.
[43] *Id.*, *ibid.*, p. 12.
[44] Thieme (1886, p. 59).

e, portanto, por (I), $c < 1$. Assim, qualquer parte integrante c de a é também uma parte integrante de 1.

Em relação à prova de que toda a parte integrante de 1 é parte integrante de a, afirma-se:

> Ora admitamos que c' seja uma grandeza numérica contida em 1, portanto $c' < 1$, de modo a que $(c',c'') = 1$; então, por I), é também
> $$(c',c'') = \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1}.$$

Na redação de Hurwitz não existe qualquer referência anterior que esclareça qual o signicado da terminologia $(c',c'') = 1$. Em todo o caso, pelo fato de c' ser uma grandeza numérica inferior a 1, parece ser óbvio existir ainda uma outra grandeza numérica c'' que juntamente com c' perfaça o número 1.

Para concluir que c' é ainda parte integrante de a, é observado que se pode escolher r suficientemente grande por forma a que $c'' > \frac{1}{r+1}$. Então

$$c' < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)},$$

pelo que c' também está contido em a.

Provados os dois passos anteriores, tem-se então que $1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$.

Desta forma, provou-se existirem grandezas numéricas com infinitos elementos que são equivalentes a números racionais. A partir deste exemplo, Weierstrass prova ainda a igualdade entre duas grandezas compostas por uma infinidade de elementos.

Exemplo 3.2: Mostremos que o número $b \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$ é igual ao número a, e, portanto, também igual a 1.

> É
> $$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$
> $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n(n+1)^2},$$
> $$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n(n+1)^3},$$
> $$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
> $$\frac{1}{n(n+1)^{m-1}} = \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m}.$$
> ______________________
> $$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m}.$$

Por exemplo (n=1):
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}.$$

O número *b* é obtido através de uma adição semelhante à última, mas constituída por infinitas parcelas:

$$b \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + ad\ inf.$$

Weierstrass apenas se refere à prova de que qualquer número que seja parte integrante de *b* também o é de *a*. Em todo o caso, a condição recíproca desta pode mostrar-se de um modo semelhante.

Seja *c* uma parte integrante de *b*. Então,

$$(3.2)\quad c \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m}.$$

Provemos que *c* é ainda parte integrante de *a*. Da igualdade (3.1) do exemplo anterior e de $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}$, tem-se

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1} \,.$$

Escolhendo *r* de tal modo que $\frac{1}{r+1} < \frac{1}{2^m}$, segue da relação (3.2) que[45] $c \leq \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)}$. Desta forma se conclui que *c* é ainda uma parte integrante de *a*.

É evidente que os dois exemplos anteriores são casos particulares de um vasto conjunto de grandezas numéricas com infinitos elementos, existindo muitas que não são iguais a nenhum racional. Weierstrass observa conhecerem-se procedimentos semelhantes para a obtenção de novos números, sendo um exemplo disso as raízes quadradas.

> Sempre se foi levado ao alargamento do domínio numérico quando se chegou a uma operação impossível. Por exemplo nas raízes quadradas. Nestas últimas tinha-se um algoritmo definido para, em tais raízes que tinham um sentido (racional), encontrar efectivamente o número. Também ainda se aplicava o mesmo [algoritmo] quando a raiz não dava certo e obtinha-se então uma fracção decimal que se prolongava até ao infinito. Em todo o caso, defi-

[45] Tratando-se claramente de uma gralha, o original consultado apresenta a desigualdade $\frac{1}{r+1} > \frac{1}{2^m}$, em vez de $\frac{1}{r+1} < \frac{1}{2^m}$; (HURWITZ, 1878, p. 13).

> nia-se por exemplo $\sqrt{2}$ encontrando pelo dito algoritmo para cada casa (decimal) um número determinado. Então podia dizer-se: não há decerto nenhum racional que, multiplicado por si mesmo, dê 2, mas pode estabe-lecer-se uma série de números racionais, dos quais cada um dos mais tardios se a-proxima mais desta propriedade do que um dos mais precoces. (THIEME, 1886, p. 59).

Se bem que este seja apenas um exemplo do que Atualmente designamos por *número irracional*, podemos ver ilustrada nesta citação uma obtenção de irracionais através de limites de números racionais. Muito embora ainda não tenhamos abordado o modo como na redação de Hurwitz é definido um irracional, podemos adiantar que não encontramos aí explícita esta ideia de ser o limite de uma sucessão de números racionais. Em todo o caso, tal poderá depreender-se de toda a teoria apresentada. A seguinte passagem do final da redação de Thieme esclarece que Weierstrass tinha, de fato, esta ideia bem presente (se não em 1878, pelo menos já em 1886).

> Na vizinhança de qualquer grandeza numérica irracional há contudo uma quantidade arbitrária de grandezas numéricas racionais, que se lhe tornam arbitrariamente próximas. Deste modo, qualquer grandeza numérica irracional arbitrária é um limite de racionais, quer dizer, dos que neste caso estão definidos. (THIEME, 1886, p. 59).

3.2 Números finitos e números infinitamente grandes

Na subsecção *Números finitos e números infinitamente grandes* da redação de Hurwitz observa-se que nem todas as grandezas numéricas formadas de infinitos elementos podem ser comparadas. Se essas entidades se identificassem com as séries numéricas usuais de termos positivos, poderíamos desde já compreender a razão para que tal sucedesse: se existem séries numéricas de termos positivos cuja soma é igual a um número real efectivo (as séries convergentes), existem outras (as divergentes) cuja soma é infinita e, portanto, não são associadas a nenhum real. Pretendendo-se construir um conjunto de números, apenas tem sentido comparar e operar aqueles números que pos-suam um *valor finito* (designados por números *finitos*), e não os *infinitamente grandes*. Podemos então entender que tais *números finitos* se identificam com os números reais positivos.

Pelas razões apontadas, a presente secção é exatamente o cerne de toda a construção dos números reais elaborada por Weierstrass.

Devemos notar desde já não existir uma completa identificação entre as séries usuais e as grandezas numéricas de Weierstrass. A diferença é justificada pelo fato de a noção de conjunto estar presente na definição de grandeza numérica, razão pela qual não é pressuposta uma ordenação dos seus elementos. Esta questão, também observada pelo matemático, aborda-se na secção 3.3.8 *Reformulação do critério de somabilidade*. É de referir que Weierstrass utiliza também para as suas somas a designação de séries. Desta forma, terá a necessidade de introduzir a terminologia de séries *incondicionalmente convergentes* por forma a distinguir as suas séries das usuais, que designa por séries *condicionalmente convergentes*.

Denição 3.4 Diz-se que uma grandeza numérica a tem um valor finito se existirem grandezas c compostas duma quantidade finita de elementos, que sejam maiores do que a.

Repare-se então que para averiguar se as grandezas compostas de uma infinidade de elementos possuem, ou não, um valor finito, Weierstrass faz intervir grandezas com um número finito de elementos que, obviamente, têm um valor finito.

Definição 3.5 Uma grandeza numérica a diz-se infinitamente grande se qualquer número c, que seja composto dum número finito de elementos, for parte integrante de I.

Desta definição, decorre que qualquer número contendo uma quantidade finita de elementos é parte integrante de quaisquer grandezas infinitamente grandes a e b. Portanto, tem-se sempre $a = b$, sendo impossível estabelecer quando $a < b$ ou $a > b$. Daqui decorre que não se pode calcular com números infinitamente grandes, argumento usado por Weierstrass para justificar o fato de a restante teoria por si apresentada se referir apenas a números finitos (HURWITZ, 1878, p. 16).

3.2.1 Considerações acerca do conceito de grandeza numérica

A redação de Hurwitz peca pela falta duma terminologia concreta para designar os diferentes tipos de grandezas numéricas definidos ao longo do curso. Por esta razão, pareceu-nos oportuno esclarecer que “números” definimos até este ponto.

O recente conceito de *número finito*, isto é, de uma grandeza numérica cujo valor seja finito, não será mais do que um número real positivo. Destes números, há a considerar dois tipos: aqueles que sejam compostos duma quantidade finita de elementos, os ditos *números usuais mistos* (racionais positivos), e aqueles que possuam uma infinidade de elementos mas que não são equivalentes a nenhum número usual misto. Para estes últimos não se acha, na redação de Hurwitz, nenhuma terminologia específica, mas repare-se que correspondem aos números irracionais positivos. Mas, tal como havia sucedido para a terminologia *número racional*, também podemos encontrar nas redações de Hettner e de Thieme a terminologia de *número irracional*[46]. Deve notar-se igualmente que, decor-

[46] Vejam-se Hettner (1874, p. 36) e Thieme (1886, p. 59).

rendo das abordagens aí seguidas, esta últi-ma designação abrange quer os números irracionais positivos, quer os irracionais negativos.

Antes mesmo de considerar as operações com números finitos, vejamos como deveremos interpretar os números reais positivos na forma como foram. Podendo a relação de *igualdade* entre duas quaisquer grandezas interpretar-se como uma relação de equivalência. Os números reais positivos podem identificar-se com os represen-tantes de todas as classes de equivalência da relação de igualdade, quando a conside-ramos definida exatamente no conjunto de todos os números finitos.

Na redação de Hettner, podemos ainda encontrar a representação de um número real positivo à custa de fracções decimais. Mostra-se que, de um modo geral,

> Se tivermos uma série de números inteiros [positivos] $1, g_1, g_2, g_3, \dots$, onde $g_1 < g_2 < g_3, \dots$ e formarmos os elementos que têm as grandezas $g_1, g_2, g_3, \dots$, como denominadores, então é sempre possível representar qualquer grandeza numérica por uma série de tais elementos [...]. (HETTNER, 1874, p. 28).

Deduz então que todo o número *a* pode ser escrito na forma:

$$a = h_0 + h_1 \frac{1}{g} + h_2 \frac{1}{g^2} + h_3 \frac{1}{g^3} + \cdots,$$

de modo a que $h_1, h_2, h_3, \dots$, tomem valores entre $0,1,2,3, \dots g-2, g-1$. Nesta redação, as grandezas numéricas compostas de elementos positivos são também identificadas com os números reais positivos. Assim, o desenvolvimento decimal de um real positivo será um caso particular da igualdade anterior para $g = 10$. O modo como se define a relação de *igualdade* entre duas grandezas numéricas representadas em fracção decimal assume um papel fundamental na obtenção do desenvolvimento decimal dos números reais. Considerando iguais duas tais grandezas apenas quando elas coincidirem "[...] em todos os algarismos individuais [...]"[47], afirma-se que o desenvolvimento dum número arbitrário numa fracção decimal, que é sempre possível, será único. Um número real será então uma tal série numérica. Note-se, no entanto, que o desenvolvimento de um número em fracção decimal não é, de fato, único[48]. Vela-se, por exemplo, o caso do número 1:

$$1 + 0\frac{1}{10} + 0\frac{1}{10^2} + 0\frac{1}{10^3} + \cdots \quad \text{e} \quad 0 + 9\frac{1}{10} + 9\frac{1}{10^2} + 9\frac{1}{10^3} + \cdots.$$

[47] *Id.*, *ibid.*, p. 27.

[48] Nos extractos disponíveis da redação de Hettner não encontramos qualquer outra indicação a este respeito.

3.2.2 Operações com números finitos

Tendo, até ao momento, sido definidas as operações de adição e multiplicação de números usuais mistos, a redação de Hurwitz prossegue com as definições das mesmas operações para números finitos.

"A definição de adição de números com infinitos elementos é a mesma que para números inteiros, e também valem para ela as leis da adição. (Decerto apenas para uma quantidade finita de parcelas.)"[49].

Tal como é notado na transcrição anterior, apenas poderemos considerar somas que envolvam uma quantidade finita de parcelas[50]. O caso de somas de infinitas parcelas (do qual as próprias grandezas numéricas compostas de infinitos elementos são um exemplo) será considerado apenas mais adiante, na secção 3.2.3 *Somas de infinitos números*.

Definição 3.6 O produto $a \cdot b$ de dois quaisquer números *a* e *b* obtém-se multiplicando cada elemento de *a* por cada elemento de *b* e formando a soma destes produtos singulares.

Proposição 3.1 O produto $a \cdot b$ tem um valor unívoco completamente determinado, e tem um valor finito se *a* e *b* tiverem valores finitos.

Demonstração:[51] Mostremos inicialmente que o produto $a \cdot b$ tem um valor unívoco completamente determinado. Para determinar o produto $a \cdot b$, basta saber o número de vezes que um elemento arbitrário $\frac{1}{r}$ aí ocorre. Mas $\frac{1}{r}$ apenas poderá ocorrer no produto $a \cdot b$ quando $\frac{1}{r_1}$ for um elemento de *a*, $\frac{1}{r_2}$ um elemento de *b* e for válida a igualdade $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$.

Ora, o elemento com denominador r_1 só ocorre em *a* em quantidade finita, digamos p_1; do mesmo modo, o elemento $\frac{1}{r_2}$ apenas ocorrerá em *b* um número finito de vezes, di-

[49] *Id., ibid.*, p. 16. Repare-se que não tem sentido considerar a adição de números com infinitos elementos como sendo a mesma do que para números inteiros. Isto porque, para adicionar números finitos teremos de adicionar os seus elementos, que poderão ser partes exatas da unidade; e estes elementos não são considerados na adição de números inteiros ou usuais. Weierstrass deveria querer referir-se à adição de números complexos, troca esta que poderá justificar-se pelo fato de a definição da operação de adição 1.6 se referir em conjunto para números usuais e para números complexos. Em todo o caso, seria mais imediato considerar a definição da operação de adição de números finitos como uma extensão daquela relativa a números usuais mistos.

[50] Segundo Dugac esta observação foi feita pelo próprio Adolf Hurwitz (DUGAC, 1973, p. 81).

[51] Com esta demonstração, ficam provadas as condições para, em particular, números usuais mistos. Desse modo podemos compreender a razão pela qual não se fez o mesmo tipo de consideração na abordagem da multiplicação desses números, facto este que já havíamos mencionado na secção 2.2 *Operações com números usuais mistos.*

gamos p_2. Além disso, *r* apenas se pode escrever finitas vezes em função de dois fatores, ou seja, existirá um certo *n* para o qual:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_{2n-1}} \cdot \frac{1}{r_{2n}},$$

onde $\frac{1}{r_{2n-1}}$ representam elementos de *a* e $\frac{1}{r_{2n}}$ elementos de *b*. Representando por p_i as ocorrências de cada um destes elementos, podemos determinar sempre quantas vezes um elemento $\frac{1}{r}$ ocorre no produto *ab*, a saber, $p_1 \cdot p_2 + \cdots + p_n \cdot p_{n+1}$ vezes. Desta forma, o produto *ab* tem um valor determinado.

Vejamos o argumento de que o produto $a \cdot b$ é finito sempre que *a* e *b* são finitos. Pela definição 3.4 de *grandeza numérica com valor finito*, $a \cdot b$ será finito se existir um número composto de uma quantidade finita de elementos que seja maior do que $a \cdot b$. Pelo fato de *a* e *b* serem finitos, existem números *a'* e *b'*, compostos de uma quantidade finita de elementos, que são maiores do que qualquer número composto de elementos de *a* e *b*, respectivamente. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ os elementos de *a* e $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_s, \ldots$ os de *b*, ordenados por ordem crescente. Escolha-se, arbitrariamente, uma parte integrante *c* de $a \cdot b$. Essa parte integrante será formada, por multiplicação, a partir duma certa quantidade de elementos de *a* e *b*, dos quais nenhum dos de *a* contém um elemento superior a α_r e nenhum dos de *b* contém um elemento superior a α'_s. Desta forma, teremos:

$$c \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_s).$$

Como[52] $a'b' > (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_s)$ também *a'b'* > *c*. Portanto *a'b'* é um produto maior do que qualquer parte integrante arbitrária de *ab*, e portanto maior do que o próprio *ab*. Sendo *a'b'* um número composto duma quantidade finita de elementos, conclui-se então que o produto *ab* é finito.

As seguintes propriedades da multiplicação de quaisquer grandezas numéricas são estabelecidas sem qualquer prova[53]:

(I) *ab* = *ba*, (II) *abc* = *acb* e (III) *a*(*b* + *c*) = *ab* + *ac*.

[52] Muito embora Weierstrass não o refira, a desigualdade que se segue:
$a'b' > (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_s)$ decorre do fato de, para números usuais mistos arbitrários *a*, *b*, *c*, *d* se ter $(a > b \wedge c > d) \Rightarrow ac > bd$. A prova deste resultado obtém-se de imediato a partir da definição da relação de desigualdade entre números usuais mistos e das propriedades da multiplicação de números usuais mistos.

[53] Hurwitz (1878, p. 17).

Facilmente depreendemos que estas leis resultam das definições 3.2 e 2.7 de *igualdade de grandezas numéricas* e de *multiplicação de números usuais mistos*.

Proposição 3.2 "Se for $b' > b$, então também $ab' > ab$."[54]

Demonstração:

> De $b' > b$ segue que existe um número c composto de finitos elementos, que está contido em b' mas não em b; $b' = (c, c')$; então se $c' = (c'', c''')$ onde novamente c'' contém uma quantidade finita de elementos, então é $b' > c + c''$ e $c + c'' > b$, e consequentemente $ab' > a(c + c'')$, $a(c + c'') > ab$, portanto finalmente $ab' > ab$ q.e.d. (HURWITZ, 1878, p. 17).

Dugac refere em nota de rodapé que Hurwitz escreveu na margem desta demonstração "não rigorosamente" (DUGAC, 1973, p. 105). A incorrecção da prova exibida por Weierstrass deve-se ao fato de ser assumida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para números finitos, a qual ainda não se provou. Esta suposição permitiu obter incorretamente as desigualdades $ab' > a(c + c'')$ e $a(c + c'') > ab$.

3.2.3 Somas de infinitos números

Atendendo a que as grandezas numéricas com infinitos elementos são elas próprias somas com uma infinidade de parcelas, podemos encontrar na secção *Somas de infinitos números* alguns pontos da teoria relativa a este tipo de grandezas que, por opção de Weierstrass, não foram na altura desenvolvidos. Dada a proximidade entre grandezas com infinitos elementos e somas de infinitos números, é inclusivamente compreensível que alguns conceitos desenvolvidos nesta secção sejam mesmo uma extensão de conceitos relativos ao primeiro tipo destas entidades. Esta semelhança poderá ainda notar-se em exemplos dados ao longo do curso.

"Para que uma tal soma [de infinitas parcelas] tenha um valor finito é preciso, antes de mais, que nenhum elemento ocorra infinitas vezes."[55]. Isto porque, caso con-trário, toda a grandeza numérica composta de uma quantidade finita de elementos seria inferior a essa soma, logo, por definição, essa soma não teria um valor finito.

O critério formulado para averiguar se uma soma com infinitos números possui ou não um valor finito, acaba por ser uma mera reformulação da definição 3.4 de grandeza numérica com valor finito. Adoptaremos a designação de *Critério de somabilidade* para este critério, de acordo com aquela utilizada por Dugac no seu artigo (Dugac, 1973)[56].

[54] Hurwitz (1878, p. 17).
[55] Hurwitz (1878, p. 18).
[56] Dugac (1973, p. 81).

3.2.3.1 Critério de somabilidade

Proposição 3.3 "Para que uma série de infinitos números [seja] somável e tenha um valor finito para soma, é necessário e suficiente que se possa mostrar a existência duma grandeza numérica que seja maior do que qualquer soma formada a partir duma quantidade arbitrária dos números da série."[57]

Este critério permite que desde já compreendamos a razão pela qual as séries de Weierstrass diferem das séries usuais (sendo que, para já, nos possamos apenas referir a séries compostas de elementos positivos): isto porque a grandeza numérica que garante a somabilidade de uma série de Weierstrass é "maior do que **qualquer soma** formada a partir duma quantidade arbitrária de números da série". É, portanto, explícita a independência na ordenação dos números de tal série, o que não sucede com as séries usuais.

A possibilidade de mostrar, para uma determinada série, a existência de uma grandeza numérica maior do que qualquer soma de uma quantidade arbitrária de números da série, depreende-se do exemplo apresentado de seguida[58].

No exemplo 3.2 da secção 3.1.2 *Exemplos de grandezas com infinitos elementos equivalentes a números racionais*, obteve-se a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(a+1)^m}+\frac{1}{a(a+1)^m}.$$

Considerando infinitos números $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ inferiores a um dado número b, é formada a série de termos

$$b_1\frac{1}{a+1}, b_2\frac{1}{(a+1)^2}, \dots, b_n\frac{1}{(a+1)^n}, \dots .$$

Sendo $b_r\frac{1}{(a+1)^r}$, relativamente a r, o membro mais elevado de entre os números da série, a soma S de uma quantidade arbitrária destes números verifica as desigualdades:

$$S \leq b_1\frac{1}{a+1}+b_2\frac{1}{(a+1)^2}+\cdots+b_r\frac{1}{(a+1)^r}<b\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(a+1)^r}\right)<b\cdot\frac{1}{a}.$$

Obtivemos, então, uma grandeza numérica, $b\cdot\frac{1}{a}$, maior do que qualquer soma composta de números da série numérica considerada, conforme pretendido.

[57] Hurwitz (1878, p. 18).

[58] *Id.*, *ibid.*. Este exemplo denota a proximidade já referida entre somas de infinitos números e grandezas compostas de uma infinidade de elementos.

Na redação de Hurwitz apresenta-se apenas uma prova da condição suficiente do critério de somabilidade, a qual apresentamos de seguida.

Demonstração: Prove-se que, caso exista uma grandeza numérica maior do que qualquer soma de uma quantidade arbitrária de números de uma série numérica, essa série terá uma soma finita.

Para obter a soma dos infinitos números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de uma série numérica basta determinar o número de vezes que um elemento α aí ocorre, e juntar todos os elementos α. Tendo em conta a observação seguinte, cada um destes elementos ocorrerá na série apenas um número finito de vezes.

> Nenhum [elemento] pode ocorrer infinitas vezes, porque se *m* for o número que é maior do que qualquer soma $\sum a_i$ que é formada a partir dos números $a_1, a_2, a_3, \ldots$, então já a partir do elemento infinitas vezes ocorrente poderíamos compor um número suficientemente grande, que desse uma soma > *m*, o que contradiria a pressuposta propriedade de *m*. (HURWITZ, 1878, p. 19).

A argumentação segue considerando agora que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ representam não apenas os elementos, mas também a quantidade de vezes que eles ocorrem na série numérica. Então a soma dos números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é a mesma que a soma dos elementos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Portanto, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ será finita se também for finita a soma dos seus elementos, ou seja, se existir uma grandeza composta de uma quantidade finita de elementos que seja maior do que $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$. Dos elementos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, é escolhida uma quantidade arbitrária (finita) de soma *b*. Sendo $a', a'', a''', \ldots a^{(n)}$ aqueles dos números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que contêm os elementos escolhidos (obviamente em quantidade finita), tem-se $a' + \cdots a^{(n)} \geq b$. Mas, por hipótese, existe um número *m* que é maior do que qualquer soma de números da série $a_1, a_2, a_3, \ldots$, em particular, $m > a' + \cdots a^{(n)}$. Como $a' + a'' + a''' + \cdots + a^{(n)}$ é um número com uma quantidade finita de elementos, pela propriedade transitiva da relação de desigualdade vem que *m* > *b*.

Desta forma, provou-se a existência de uma grandeza numérica com um número finito de elementos, a soma $a' + a'' + a''' + \cdots + a^{(n)}$, que é inferior a qualquer soma de elementos entre $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. O que significa, pela definição 3.4, que a soma $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$ é finita. Portanto, também é finita a soma $a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots$.

Uma vez que a operação de adição só era válida, até aqui, para uma quantidade finita de números, tornou-se necessário generalizar algumas propriedades para somas de infinitos números. A primeira delas, à qual se refere a proposição seguinte, pode ser entendida como uma extensão a tais somas das transformações válidas para grandezas numéricas compostas de uma infinidade de elementos.

Proposição 2.3.4 "[...] numa soma com infinitos membros, o igual pode ser substituído pelo igual sem alterar o valor da soma. [...] [isto é] se $a_1 = a'_1, a_2 = a_2,$ etc., também

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots}_{\sum a_i} = \underbrace{a'_1 + a'_2 + a'_3 + \ \dots}_{\sum a'_i}$$ [59]

Demonstração: Ora, pela definição 3.2 de *igualdade* entre grandezas numéricas compostas de infinitos elementos, basta provar que qualquer número *c* que esteja contido numa das somas também o está na outra.

De seguida, considera-se, ao invés da soma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, a soma $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ são os elementos da série $a_1, a_2, a_3, \dots$. Analogamente, a soma $a'_1 + a'_2 + a'_3 + \cdots$ em vez de $\alpha' + \beta' + \gamma' + \cdots$, sendo $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ os elementos de $a'_1, a'_2, a'_3, \dots$. Em todo o caso, subentende-se do decorrer da demonstração que, tal como já havia acontecido na prova da proposição 3.3, também agora $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ e $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ representam não apenas os elementos das respectivas grandezas, mas também o número de vezes que nelas ocorrem.

A argumentação seguiria com a prova de dois passos: primeiro que qualquer parte integrante de $\sum a_i$ é parte integrante de $\sum a'_i$ e finalmente a condição recíproca desta. Na redação de Hurwitz, podemos apenas encontrar a primeira destas provas. A razão para que tal suceda deve-se ao fato de a relação de igualdade entre quaisquer grandezas numéricas (definição 3.2) verificar a propriedade simétrica.

Sendo *c* uma parte integrante arbitrária de $\sum a_i$ (ou, o que é o mesmo, de $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$), podemos transformar *c* num número *c'*, de modo a que *c'* também contenha alguns (mas não todos) dos elementos $\alpha, \beta, \gamma, \dots,$ quando muito tantas vezes quantas $\sum a_i$. Desse modo podemos escolher em $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ uma quantidade finita de elementos cuja soma seja superior a *c*. Designando por $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r$ as grandezas a_i onde foram escolhidos tais elementos, tem-se $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_r > c$ e, portanto, também $\bar{a}'_1 + \bar{a}'_2 + \dots + \bar{a}'_r > c$. Desta forma, *c* é ainda uma parte integrante da soma $\sum a'_i$, conforme pretendido.

3.2.3.2 Soma por partes

Nesta secção justifica-se a aplicação das propriedades comutativa e associativa na obtenção das somas das séries de Weierstrass.

> Seja dada uma quantidade infinita de grandezas numéricas, cuja soma tenha um valor finito. Pode então decompor-se esta série numérica em grupos; a

[59] *Id.*, *ibid.*, p. 20.

> quantidade destes grupos pode ser finita ou infinita, e cada grupo pode novamente conter uma quantidade finita ou infinita de grandezas numéricas. (HURWITZ, 1878, p. 19).

Mesmo antes de demonstrar que, qualquer que seja a decomposição considerada, o valor da soma de uma série não se altera, segue-se um exemplo de uma tal reordenação dos membros de uma série.

Exemplo 3.3: Considere-se a soma:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\frac{1}{(b+1)^{\mu}},$$

e prove-se inicialmente que possui um valor finito. Escolhendo uma quantidade arbitrária (finita) de membros, onde *l* é o mais elevado valor de λ ocorrente, e *m* o de μ, obtém-se uma soma *S* que verifica as desigualdades seguintes:

$$S \leq \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\frac{1}{(b+1)^{\mu}} \leq \sum_{1}^{l}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\sum_{1}^{m}\frac{1}{(b+1)^{\mu}} < \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}.$$

Apesar de não ser justificada, repare-se que a última das desigualdades decorre da expressão:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m},$$

obtida no segundo dos exemplos apresentados na secção 3.1.2 *Exemplos de grandezas com infinitos elementos equivalentes a números racionais*. Desta forma, $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$ é maior do que a soma de quaisquer membros arbitrários (em quantidade finita) escolhidos na série numérica, pelo que a soma $\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\frac{1}{(b+1)^{\mu}}$ é finita.

A decomposição da série dada em grupos é feita considerando um número infinito de grupos, contendo cada um deles uma infinidade de grandezas numéricas.

Aqui só é fácil realizar uma decomposição em grupos, a saber

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\frac{1}{(b+1)^{\mu}} = \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+\cdots\right) + \frac{1}{(b+1)^2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+\cdots\right)+\cdots.$$

A garantia de que um qualquer reagrupamento dos termos de uma série numérica não altera o valor da sua soma é estabelecida na proposição seguinte.

Proposição 3.5 "Se se decompuser uma série infinita de números em grupos, se juntarem os números de cada grupo somando-os, e depois se adicionarem todos os grupos uns aos outros, então a soma final é igual à soma da série infinita dos números."[60]

Demonstração: Sendo $a_1, a_2, a_3, \dots$ a série de números, são inicialmente considerados os grupos $a_1 + a'_1 + a''_1 + \cdots; a_2 + a'_2 + a''_2 + \cdots; \dots$, cujas correspondentes somas são designadas pelos números $b_1, b_2, \dots$.

Pela definição 3.2 de igualdade entre números finitos, para mostrar o pretendido seria necessário considerar dois passos: primeiro que toda a parte integrante de $\sum_i a_i$ é uma parte integrante da soma dos grupos, isto é, de $\sum_i (a_i + a'_i + a''_i + \cdots)$; e finalmente a condição recíproca desta. Weierstrass optou por uma prova diferente. Atendendo a que um elemento α ocorre finitas vezes na soma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, basta mostrar que este número de ocorrências é exatamente igual àquele relativo ao elemento α na soma $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$. Se α ocorrer nos números $a, b, \dots g$ da série numérica, então ele apenas ocorrerá naqueles dos grupos $b_1, b_2, \dots$ que tiverem um dos números $a, b, \dots g$ como parcela. Portanto ele ocorrerá na soma $b_1 + b_2 + \cdots$ exatamente tantas vezes como em $a_1 + a_2 + \dots$, sendo isto válido para qualquer elemento arbitrário da soma $\sum a_i$.

Tendo em conta o modo como são construídos os grupos de somas $b_1, b_2, \dots$ na demonstração anterior, podemos, mais uma vez, comprovar que nas séries de Weierstrass não é pressuposta nenhuma ordenação nos seus termos. Será por esta razão que a decomposição em grupos de uma tal série pode ser feita comutando convenientemente as suas parcelas.

O recíproco desta proposição é também enunciado.

Proposição 3.6 "Seja $b_1 + b_2 + \cdots$ uma soma de infinitos membros. Seja possível representar b_p como uma soma de infinitas grandezas numéricas.
$b_p = a_p + a'_p + a''_p + \dots$. Então é $\sum b = \sum a$."[61]

Pressupondo, tal como é observado por Hurwitz, que $\sum b$ tem um valor finito, a prova deste resultado é em tudo semelhante à demonstração da anterior proposição 3.5.

3.2.3.3 Extensão da operação de multiplicação

[60] *Id.*, *ibid.*, p. 22.
[61] *Id.*, *ibid.*.

Tal como foi observado na secção 3.2.2 *Operações com números finitos*, a adição de números finitos apenas poderia considerar-se para uma quantidade finita de parcelas. Assim, relativamente à operação de multiplicação definida igualmente para números finitos, as leis $ab = ba; abc = acb; a(b + c) = ab + ac$ seriam válidas apenas para somas com um número finito de termos. Por forma a que tenha sentido efetuar um produto de somas constituídas por uma infinidade de parcelas, Weierstrass formula a seguinte definição, que é apenas uma extensão da definição 3.6, relativa a números finitos.

Definição 3.7 Para multiplicar uma série $\sum a_\lambda$ por outra $\sum b_\mu$ tem de se multiplicar cada número a_λ que ocorre na primeira série por cada número b_μ que ocorre na segunda das séries, e formar a soma destes produtos singulares, ou seja,

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\lambda b_\mu \,.$$

A exposição que se segue na redação de Hurwitz, respeitante a produtos de séries é extremamente obscura, não se entendendo com clareza o que é pretendido por Weierstrass. Em todo o caso, devemos referir que podemos aí encontrar a prova de que $\sum\sum a_\lambda b_\mu$ é finito sempre que $\sum a_\lambda$ e $\sum b_\mu$ o sejam. Atribui-se ainda um significado a $\sum\sum a_\lambda b_\mu$, pelo que o produto de duas séries fica completamente determinado. Através da decomposição dos números finitos $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2 \dots$ nos seus elementos constituintes, dá um significado à expressão $\sum\sum a_\lambda b_\mu$, a saber:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\lambda b_\mu = (a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \cdots) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \cdots) + \cdots \,.$$

3.3 Operações indiretas e novos números

Se bem que na redação de Hurwitz não exista nenhum título de uma secção que anuncie a criação de novos números, os *elementos opostos*, a sua importância na construção dos números reais parece justificá-lo.

Se, por um lado, as definições das operações de adição e multiplicação foram sucessivamente estendidas por Weierstrass até abrangerem os números finitos até aqui definidos, o mesmo não sucedeu com as operações de subtração e divisão que designa de "indiretas"[62]. A operação de subtração apenas se definiu para *números usuais a* e *b*, cumprindo a condição $a > b$, não tendo sido portanto criado o conjunto dos números inteiros negativos. Já a operação de divisão foi um pouco mais além, sendo definida para números usuais *a* e *b*, mas não sendo condição necessária que *a* fosse um múltiplo de *b*. Desta for-

[62] *Id.*, *ibid.*, p. 24.

ma, a operação de divisão permitiu a criação dos *números usuais mistos*, ou seja, dos racionais positivos. Ora, é evidente que estas duas últimas operações de subtração e divisão necessitam de ser estendidas aos outros conjuntos de números. E, tal como afirma Weierstrass:

> [...] para podermos atribuir um sentido à subtração em todos os casos, temos de alargar o domínio numérico. No entanto, com a divisão não [acontece assim]. Esta aparente incongruência provém de acima já termos introduzido as partes exatas, e portanto já aí termos alargado o domínio numérico, embora apenas com base na divisão. (HURWITZ, 1878, p. 24).

O conjunto de todos os números até aqui definidos será então alargado com a junção dos *elementos opostos*, isto é, dos simétricos de todos os elementos existentes. Mas a introdução destes novos números irá tornar novamente "desatualizadas" as definições das diferentes operações aritméticas, bem como os conceitos relativos à comparação de números. A reformulação de todos estes conceitos irá portanto culminar com a obtenção de um domínio numérico incluindo todos os números definidos até ao momento, os *números finitos*, bem como os seus simétricos. Pelo fato de ficar munido de um conjunto de operações aritméticas que lhe conferem a estrutura de corpo ordenado completo, poderemos então identificá-lo com o *conjunto dos números reais*.

3.3.1 Extensão da operação subtração e elementos opostos

Genericamente, a operação de subtração é definida do seguinte modo:
Definição 3.8 Dados a e b números finitos, a sua diferença, ($a - b$), é o número que adicionado a b, dá soma a.

Daí que $(a - b) + b = a$ seja a equação definidora da subtração.

Vejamos como construir estas diferenças, por forma a que a operação de subtração esteja definida para quaisquer números finitos a e b. São inicialmente consideradas grandezas tais que $a > b$, podendo estas ser compostas por uma quantidade finita ou infinita de elementos. E será ao abordar o caso em que se tenha $a < b$ que surgirá a necessidade de introduzir novos números, os *elementos opostos*.

- **Se *a* e *b* forem números com quantidade finita de elementos e *a*>*b***, então a diferença obtém-se facilmente. Será apenas necessário aplicar ao número a as trans-formações definidas sobre números usuais mistos, abordadas na secção 2.1 *Comparação de números usuais mistos*. Transformando a em $a' + a''$, onde a' contém os mesmos elementos (e mais nenhum) que b e tantas vezes quantas b, obtém-se de imediato a diferença procurada, a saber, o número a''.

- **Se *a*>*b* mas *a* e *b* forem números com infinitos elementos**, a diferença não pode ser formada diretamente. Weierstrass afirma[63] que também neste caso existem procedimentos para obter (a – b). A construção deste número é descrita na demonstração do próximo resultado.

Proposição 3.7 Se a e b forem grandezas numéricas compostas por uma infinidade de elementos tais que $a > b$ então é possível obter a diferença $a – b$.

Para obter o número ($a – b$), Weierstrass enuncia e demonstra ainda o seguinte resultado.

Proposição 3.8 Dadas grandezas numéricas a e b, se $b+\varepsilon > a$, sendo ε um elemento arbitrário, então ou $b = a$ ou $b > a$.

Demonstração: Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e $\beta_1, \beta_2, \dots$ os elementos de a e b, respectivamente. Ora $b+\varepsilon > a$ significa que, de entre os elementos $\beta_1, \beta_2, \dots, \varepsilon$, se pode escolher uma quantidade finita, de tal modo que a soma S dos escolhidos verifique[64] $S \geq a$. Relativamente a esta escolha, são consideradas duas possibilidades:

> [...] ou ε não precisa de estar entre os escolhidos, sendo então já $b > a$, ou ε tem necessariamente de se encontrar entre os escolhidos, sendo *então* $b = a$ porque qualquer parte integrante de b é parte integrante de a, e reciprocamente não pode haver nenhuma parte integrante de a que não seja também parte integrante de b. (HURWITZ, 1878, p. 25).

Sendo o primeiro destes casos imediato, vejamos a argumentação que poderemos utilizar para provar que, quando ε se encontra necessariamente entre os elementos escolhidos da soma S, se tem $b = a$. Ora, pela definição 3.2 de igualdade entre quaisquer grandezas numéricas, há que mostrar que toda a parte integrante de b é parte integrante de a e, reciprocamente, que toda a parte integrante de a é ainda parte integrante de b. Na redação de Hurwitz apenas consta a segunda dessas provas; mas numa exposição bastante confusa, em parte devido ao fato, já notado, de não se distinguirem desigualdades no sentido estrito de desigualdades no sentido *lato*. Atendendo também ao fato de Hurwitz escrever no final desta demonstração "falso"[65] optamos, no que resta desta prova, por uma abordagem diferente.

Mostremos inicialmente que, se ε tem necessariamente de se encontrar entre os elementos escolhidos de soma S, por forma a que $S \geq a$, então toda a parte integrante de b

[63] *Id.*, *ibid.*, p. 25.
[64] No original, considera-se a desigualdade no sentido estrito $S > a$: *Id.*, *ibid.*.
[65] *Id.*, *ibid.*.

é parte integrante de *a*. Mas toda a soma *S'* de quaisquer elementos $\beta_1, \beta_2, \ldots$ será tal que *S* '<*a*. Tal significa, pela definição 3.2, que qualquer parte integrante de *b* (cuja soma é *S* ') é parte integrante de *a*, conforme pretendíamos.

Por redução ao absurdo, suponhamos agora que existe uma parte integrante de *a* que não é parte integrante de *b*. Mas então existe *n* finito de tal forma que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < a \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq b \ .$$

Pelo fato de $\sum_1^n \alpha_i$ ser uma parte integrante de *a*, existe sempre um elemento ε tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \varepsilon \leq a \ .$$

Como

$$b + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \varepsilon \ ,$$

teremos $b + \varepsilon \leq a$. Mas isto é um absurdo, já que, por hipótese, se tem $b + \varepsilon > a$, para qualquer elemento ε. ■

Deste modo pode agora demonstrar-se a proposição 3.7, a partir da qual se determina a diferença entre grandezas *a* e *b* com infinitos elementos tais que *a* > *b*.

Demonstração [**Proposição 3.7**]: Da proposição anterior podemos afirmar que se for *a* > *b*, existem elementos, cuja soma denotamos por *S*, que podem ser adicionados a *b*, de tal forma que se tenha ainda $b + S \leq a$. Mais uma vez, o original de Weierstrass[66] apenas contempla a desigualdade no sentido estrito, *b* + *S* < *a*.

Caso seja *b* + *S* = *a*, determinamos, por definição, a diferença *a* – *b*: é a soma *S*, já que adicionada a *b* dá soma *a*.

Se *b* + *S* < *a*, afirma-se: “Na série de elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, seja então α o primeiro [portanto, o maior] que tem a propriedade de ser ainda *a* > *b* + α.”[67]. Aplicando à desigualdade *a* > *b*+α o mesmo raciocínio que a *a* > *b*, podemos encontrar um elemento α' (com $\alpha' \leq \alpha$) de tal modo que $a \geq b + \alpha + \alpha'$. Uma vez mais a desigualdade é apenas considerada no sentido estrito[68], $a > b + \alpha + \alpha'$. Apesar de não ser justificada a razão pela qual $\alpha' \leq \alpha$, é fácil verificar a sua validade: se tivéssemos $\alpha' > \alpha$ então de $a > b + \alpha$, viria $a > b + \alpha'$, o que contradiria a pressuposição de α ser o maior elemento tal que $a > b + \alpha$.

[66] *Id.*, *ibid.*, p. 26.
[67] *Id.*, *ibid.*.
[68] *Id.*, *ibid.*.

Agora, se tivermos $a = b + \alpha + \alpha'$, a diferença *a* - *b* está encontrada. Senão, a argumentação segue de forma semelhante ao caso $a > b + \alpha$.

A obtenção da diferença *a* – *b* decorre da repetição sucessiva dos passos anteriores: "Ora se eu puser $c = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots$ ad inf., então posso mostrar que c é finito e adicionado a *b* dá *a*, portanto é $c = (a - b)$"[69].

Mostremos então que c é finito

> Se b' for uma grandeza que satisfaz a desigualdade $a < b+b'$, para b' pode por exemplo ser escolhido o próprio *a*, então segue-se que a soma duma quantidade arbitrária de grandezas α tem de ser menor do que b'.[70]

Portanto, qualquer parte integrante de *c* é inferior a b', ou seja, inferior a *a*. Pelo fato de *a* ser uma grandeza finita, conclui-se que *c* é finito, conforme pretendido.

Para provar a igualdade $b + c = a$ há a considerar dois passos: que todo o número contido em $b + c$ está contido em *a* e, reciprocamente, que qualquer número que esteja contido em *a* está contido em $b + c$. Tal como é dito por Weierstrass, estes fatos mostram-se facilmente: com efeito basta notar que, para um *n* arbitrário, se tem

$$a > b + \alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots + \alpha^{(n)}.$$

Desta forma $a = b + c$, o que significa que $c = \sum \alpha = a - b$ é a diferença entre os números *a* e *b*.

- **Se os números *a* e *b* forem tais que *a* < *b***, torna-se necessário alargar o domínio numérico.

A cada elemento α de uma qualquer grandeza numérica, isto é, à unidade principal e às suas partes exatas, faz-se corresponder o seu simétrico que se designará por seu *elemento oposto*, e se denota por α'.

Definição 3.9 "Para cada um dos elementos até agora considerados, tomamos a mais um oposto ao mesmo, quer dizer, um tal que num agregado de elementos destrua o seu elemento correspondente."[71]

Dadas grandezas numéricas arbitrárias *a*, *b* e *b'*, postulam-se vários resultados[72] respeitantes a este conceito, os quais se conjugam na proposição seguinte.

---

[69] *Id.*, *ibid.*.
[70] *Id.*, *ibid.*.
[71] *Id.*, *ibid.*, p. 27.
[72] *Id.*, *ibid.*.

Proposição 3.9 a) Se a for um número que contenha o elemento α, isto é, $a = a_1 + \alpha$, então $(a_1 + \alpha) + \alpha' = a_1$.
b) Para cada número arbitrário *b*, composto de elementos considerados até agora, existe um número *b'* que o anula. Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, forem os elementos constituintes de *b*, então *b′* é composto pelos elementos $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$.
c) $(b')' = b$.

Estabelecidos estes resultados acerca de elementos opostos, vejamos como poderemos obter a diferença de dois números finitos *a* e *b* tais que $a < b$. Pela definição da operação subtração, temos $(a - c) + c = a$. Mas, pela proposição anterior, também $(a + c') + c = a$. Desta forma, $a - c$ tem o mesmo significado que $a+c'$, pelo que o cálculo da diferença $a - c$, sendo $a < c$, passa da operação de subtração para a adição de números. Atendendo a que os elementos constituintes de c' são os opostos dos elementos de *c*, sabemos então como formar a diferença $a - c$. Apesar de tal não ser mencionado na redação de Hurwitz, deve notar-se que ainda não se definiu a operação de adição para elementos opostos. Desta forma, será apenas na próxima secção 3.3.3 *Reformulação da operação de adição* que a operação de subtração poderá ser considerada para dois quaisquer números.

Relativamente ao elemento oposto de uma parte exata da unidade, Weierstrass formula e demonstra o resultado que se segue. A sua prova irá permitir ainda a formulação dos conceitos de *unidade positiva* e *unidade negativa*.

Proposição 3.10 O oposto α' duma parte exata $\frac{1}{n}$ da unidade 1 é a *n*-ésima parte exata do oposto da unidade, 1′.

Demonstração: Pela proposição 3.9, tem-se:

$$\underbrace{a + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ parcelas}} + \underbrace{(\alpha' + \alpha' + \alpha' + \cdots)}_{n \text{ parcelas}} = a,$$

igualdade que podemos escrever na forma $a + 1 + (\alpha' + \alpha' + \alpha' + \cdots) = a$.
Mas o mesmo será dizer que $\alpha' + \alpha' + \alpha' + \cdots = 1'$, sendo 1′ o elemento oposto da unidade. Isto significa, por definição, que α' é a n^{a} parte exata de 1′.

Definição 3.10 "A unidade principal deverá dizer-se a positiva e a oposta a unidade negativa, correspondentemente aos elementos."[73]

Até este ponto, as diferentes operações aritméticas, bem como os critérios de comparação de números, aplicam-se somente a números positivos. A introdução do conceito

[73] *Id.*, *ibid.*, p. 28.

de *elemento oposto* irá portanto exigir a reformulação de todos esses conceitos, aspecto que iremos abordar nas próximas secções.

3.3.2 Reformulação do conceito de grandeza finita

Definição 3.11 "Uma grandeza diz-se finita se tanto o número formado pelos elementos positivos, como também o formado pelos negativos, for finito. (Os últimos devem naturalmente comparar-se com a unidade negativa)."[74]

A partir desta reformulação podemos pois aperceber-nos mais uma vez que as somas das séries de Weierstrass podem ser calculadas ordenando de uma qualquer forma os seus membros. Será esta a razão que justica a diferença entre estas séries e as usuais cujos termos sejam positivos.

3.3.3 Reformulação da operação de adição

Definição 3.12 "Por soma de duas grandezas, entendemos a reunião dos elementos duma com os da outra."[75]

Em particular, será agora possível adicionar elementos opostos. Como vimos na secção 3.3.1 *Extensão da operação de subtração e elementos opostos*, para obter a diferença entre números finitos, necessitamos apenas de considerar a operação de adição entre números, se bem que possam incluir-se elementos opostos. Portanto, estaremos agora em condições de aplicar a operação de subtração a quaisquer números finitos. Tal como é observado mais adiante na redação de Hurwitz[76], esta dependência entre as duas operações justifica a transferência das propriedades relativas à adição para a subtração de duas quaisquer grandezas numéricas.

3.3.4 Reformulação de transformações sobre números

Para além das transformações definidas para números usuais mistos, as quais abordamos na secção 2.1 *Comparação de números usuais mistos,* Weierstrass considera ainda possíveis para elementos opostos as seguintes transformações[77]:

[74] *Id.*, *ibid.*.
[75] *Id.*, *ibid.*.
[76] *Id.*, *ibid.*, p. 30.
[77] *Id.*, *ibid.*, p. 28.

1) Quaisquer dois elementos opostos podem simplesmente omitir-se;
2) Pode juntar-se um elemento arbitrário a um número, mas simultaneamente é preciso acrescentar-se o elemento oposto.

3.3.5 Reformulação do conceito de igualdade

A relação de igualdade entre dois números finitos, estabelecida através da definição 3.2 utilizava o conceito de parte integrante de um número. No entanto, tal conceito não é estendido a grandezas numéricas que contenham elementos opostos: a definição de igualdade entre dois quaisquer números será formulada noutros termos. A propriedade "igual adicionado a igual dá igual" é o ponto de partida para a dedução desta nova relação de igualdade[78].

Considerem-se $a = a_1 + a'_2$ e $b = b_1 + b'_2$ duas grandezas quaisquer, onde a_1 e b_1 representam, respectivamente, os agregados dos elementos positivos de *a* e *b*, e a_2 e b_2 os correspondentes agregados dos elementos negativos. De acordo com a propriedade "igual adicionado a igual dá igual" que deverá manter-se ainda válida, afirma-se:

"Vamos portanto tomar *a* = *b* quando, por ex., $a + a_2 + b_2 = b + a_2 + b_2$ [...]"[79]. Repare-se que o outro caso possível para a igualdade entre dois números, seria quando se tivesse $a + a'_1 + b'_1 = b + a'_1 + b'_1$. Mas, neste caso, seríamos conduzidos a uma condição envolvendo uma igualdade entre agregados compostos apenas de elementos negativos, para a qual não foi ainda formulada nenhuma definição. Assim sendo, a noção de igualdade entre dois quaisquer números é verificada a partir da igualdade das somas dos respectivos agregados de elementos positivos com os correspondentes elementos opostos dos elementos negativos.

Atendendo às imediatas igualdades:

$a + a_2 + b_2 = a_1 + a'_2 + a_2 + b_2 = a_1 + b_2$ e

$b + a_2 + b_2 = b_1 + b'_2 + a_2 + b_2 = b_1 + a_2$,

apresenta-se o conceito de igualdade entre dois quaisquer números.

Definição 3.13 Dois números *a* e *b* dizem-se *iguais* se $a_1 + b_2 = b_1 + a_2$.

Veja-se que para definir a anterior relação de igualdade foi assumida a propriedade "igual adicionado a igual dá igual". No entanto, depois de definir tal relação, afirma-se que é necessário demonstrar o resultado que citamos de seguida, que mais não é do que a propriedade que inicialmente se supôs ser verdadeira.

[78] *Id., ibid.*.
[79] Note-se que os números a_2 e b_2 designam os elementos opostos de a'_2 e b'_2, respectivamente, sendo, por isso, constituídos por elementos positivos.

Proposição 3.11 “[...] quando $\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\}$ também $a + c = b + d$.”[80]

Tal abordagem será justificável apenas segundo a seguinte perspectiva: por forma a construir o conceito de *igualdade* entre dois números foi assumido que numa soma podemos substituir o igual pelo igual sem alterar o valor da soma; mas após termos formulado a definição de tal relação de igualdade, devemos verificar se essa definição cumpre ainda aquilo que achamos essencial, a saber, que é válida a propriedade “igual adicionado a igual dá igual”.

Apesar de tal não ser notado na redação de Hurwitz, as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva desta relação de igualdade são ainda válidas, sendo imediatas as suas provas. Atendendo a que as grandezas numéricas são agora compostas também por números negativos, podemos interpretar os números reais como sendo os representantes das classes de equivalência para esta relação. Isto sucederá quando consideramos tal relação definida no conjunto de todas as grandezas numéricas cujos elementos são a unidade e as suas partes exatas bem como os elementos opostos de todos estes elementos, grandezas estas que devem possuir um valor finito.

3.3.6 Valor absoluto dum número

Somente agora, com a introdução do conceito de *valor absoluto* dum número, que serão introduzidas nesta teoria dos números irracionais as designações de *número positivo* e *número negativo*, bem como uma notação para o elemento zero, o que irá facilitar a linguagem usada daqui em diante.

Definição 3.14 “Se se entender por valor absoluto dum número o número que surge do dado quando eu refiro todos os seus elementos a uma unidade, então pode:
1) o valor absoluto dos membros positivos dum número ser > do que o valor absoluto dos números negativos; então o número diz-se positivo.
2) acontecer o contrário de 1); então o número diz-se negativo.
3) os dois valores absolutos podem ser iguais um ao outro.”[81]

Desta definição é claro que para Weierstrass o contrário de > é <. Isto porque, se assim não fosse, não haveria a necessidade de se incluir um terceiro caso.

As expressões *anular*, *destruir* ou ainda *suprimir*, utilizadas na abordagem do conceito de elemento oposto[82] indicam que Weierstrass considerava já a existência do núme-

[80] *Id.*, *ibid.*, p. 29.
[81] *Id.*, *ibid.*.
[82] *Id.*, *ibid.*, p. 27.

ro zero. No entanto, será apenas com a próxima observação que é introduzida uma notação para tal número: "As grandezas numéricas com as quais 3) acontece podem ser adicionadas a um número arbitrário sem que o número aumente pela sua junção. Denota-se por 0. Portanto, 0 + *a* = *a é* = *a*."[83]

O oposto de *a* (isto é, o seu simétrico) denota-se por –*a*.[84]

Os resultados reunidos na proposição seguinte permitem observar alguns pontos importantes acerca da operação de subtração.[85]

Proposição 3.12
a) Se $a = a_1 - a_2$ for um número positivo, pode transformar-se *a* num número cuja parte negativa tenha um valor absoluto que pode ser tomado tão pequeno quanto se queira.
b) Seja *a* uma grandeza composta de elementos positivos e elementos negativos. Se *a* tiver um valor positivo, então existe sempre um número que lhe é igual e que apenas contém elementos positivos. Caso *a* tenha um valor negativo, existe um número igual a *a* que apenas contém elementos negativos.[86]

Demonstração:
a) Seja então $a = a_1 - a_2$ com $a_1 > a_2$. Se *n* for um número inteiro positivo arbitrário, então na série $\frac{1}{n}, 2 \cdot \frac{1}{n}, 3 \cdot \frac{1}{n}, \ldots$, é certo existir um primeiro membro, digamos o ($\mu + 1$) ésimo, que é maior ou igual a a_2, donde $\mu \cdot \frac{1}{n} < a_2$.

Considerando $a_2 = a_3 + a_4$, se fizermos $a_3 = \mu \cdot \frac{1}{n}$, vem que $a_4 \leq \frac{1}{n}$. Assim *a* escreve-se na forma $a = (a_1 - a_3) - a_4$. Pode sempre transformar-se $a_1 - a_3$ num número com elementos positivos, pois a_1 pode ser transformado de modo a que a_3 seja sua parte integrante[87]. E o número a_4, valor absoluto dos elementos negativos de *a*, é tão pequeno quanto se queira, conforme pretendido.
b) Caso *a* seja um número positivo, isto é, *a* = *b* – *c*, com *b* > *c*, refere-se que o fato de *a* poder ser transformado numa grandeza com elementos positivos decorre da demonstração da existência da diferença *b* – *c*, quando *b* > *c*. Vejamos a justificação para tal.

[83] *Id.*, *ibid.*, p. 29, 30.
[84] *Id.*, *ibid.*, p. 30.
[85] *Id.*, *ibid.*, p. 30, 31.
[86]Caso *a* tenha um valor positivo esta proposição afirma que é possível obter uma grandeza que lhe é igual, mas que é composta apenas de elementos positivos. Essa grandeza diz-se não diretamente declarável a *a*. Depreendemos que esta terminologia se refere ao facto de, sem efetuarmos as trans-formações definidas na secção 3.3.4 *Reformulação de transformações sobre números,* as duas grandezas não serem compostas por elementos iguais. O mesmo se aplica ao caso em que a grandeza *a* possua um valor negativo: *Id.*, *ibid.*.
[87] Weierstrass refere-se a esta transformação como sendo a_3 parte integrante direta de a_1. Tal como já foi referido anteriormente, este conceito parece não significar nada mais do que uma mera parte integrante: *Id.*, *ibid.*, p. 31.

Da proposição 3.7 ficou provado que, caso fosse $b > c$, a diferença $b - c$ era definida como sendo a soma $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots$ $ad\ inf.$. Uma vez que, pela argumentação utilizada, estes elementos são todos positivos, a grandeza $a = b - c$ pode, como pretendido, ser escrita como uma soma de elementos positivos.

Relativamente ao caso de a ser um número negativo, não é apresentado qualquer argumento que justifique o fato de a poder ser escrito como soma de elementos negativos. No entanto, note-se que basta considerar a como sendo o elemento oposto do número positivo $c - b$, isto é, $a = -(c - b) = b - c$. Desta forma, existem igualmente certos elementos positivos $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ tais que

$b - c = -(\beta + \beta' + \beta'' + \cdots ad\ inf.)$

e, portanto, $a = b - c = -\beta - \beta' - \beta'' - \cdots ad\ inf.$

3.3.7 Reformulação de soma por partes

O novo critério da soma por partes difere do estabelecido na secção 3.2.3.2 *Somas por partes* apenas pelo fato de considerar as grandezas numéricas também constituídas por elementos negativos.

Proposição 3.13 "Se a soma das grandezas numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (que têm elementos + e –) for finita, e se decompuser esta soma em grupos e depois se formar para cada grupo a soma dos números a_i nele contidos, então se se voltarem a unir por adição as somas obtidas o resultado é igual à soma de todos os a_i"[88]

A prova desta proposição decorre de imediato do fato de cada elemento α ocorrer na soma dos a_i tantas vezes quantas na soma das somas dos grupos. Notemos, no entanto, que ainda não sabemos quando uma soma de infinitas grandezas numéricas compostas de elementos positivos e negativos tem um valor finito. Tal condição será estipulada apenas na secção seguinte, aquando da reformulação do critério de somabilidade. Por esta razão poderíamos apontar existir alguma incoerência na apresentação destes critérios. No entanto, esta ordem justifica-se pelo fato de a prova do novo critério de somabilidade necessitar da aplicação de uma soma por partes.

Para completar o critério da soma por partes, estendido agora a grandezas numéricas contendo elementos negativos, deveria seguir-se o recíproco da proposição anterior. Este afirmaria que se uma série $b_1, b_2, b_3, \ldots$ tivesse valor finito e se fosse possível escrever cada b_i como uma soma de infinitos termos de uma série $a_1, a_2, a_3, \ldots$, isto é, se $b_i = a_i + a'_i + a''_i + \cdots$, ter-se-ia $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$. A sua prova seria semelhante à prova anterior, atendendo a que todo o elemento de $\sum b_i$ ocorre aí um número finito de vezes, e este é igual ao número de ocorrências na soma $\sum a_j$. No entanto, devido à notação utiliza-

[88] *Id., ibid.*.

da, o enunciado que encontramos na redação de Hurwitz contém uma trivialidade. A proposição que se segue refere-se, então, ao resultado contido na redação de Hurwitz.

Proposição 3.14 Se $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ for finito e b_i for igual a uma soma de outros números $b_i = a_1^i + a_2^i + a_3^i + \cdots = \sum \alpha_i - \sum \beta_i$, onde $\sum \alpha_i$ representa a soma de todos os elementos positivos que ocorrem em $a_1^i + a_2^i + a_3^i + \cdots$ e $\sum \beta_i$ o valor absoluto da soma dos elementos negativos, então

$$\sum_i b_i = \sum_i (a_1^i + a_2^i + a_3^i + \cdots).$$

Da prova da igualdade $\sum_i b_i = \sum_i (a_1^i + a_2^i + a_3^i + \cdots)$ apenas poderemos afirmar que $\sum b_i$ é igual à soma de todas as somas $a_1^i + a_2^i + a_3^i + \cdots$, e não, como mais geralmente se pretendia, igual à soma dos termos da série $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

A notação utilizada para enunciar esta proposição irá tornar incorreta a sua demonstração. Na transcrição que se segue, contém o critério da soma por partes respeitante a grandezas com-postas apenas de elementos positivos, isto é, às proposições 3.5 e 3.6.

Demonstração:
"[...] então é $\sum_i (b_i + \sum \beta_i) = \sum_i (a_1^i + a_2^i + a_3^i + \cdots)$, porque é $b_i + \sum \beta_i = \sum \alpha_i$ e portanto, pela pág. 22,
$\sum_i (b_i + \sum \beta_i) = \sum_i \sum \alpha_i$ ou $\sum_i b_i = \sum_i (\sum \alpha_i - \sum \beta_i) = \sum_i (a_1^i + a_2^i + \cdots)$."[89]

Deve notar-se que a igualdade

$$(3.3) \quad \sum_i \left(b_i + \sum \beta_i\right) = \sum_i \sum \alpha_i$$

é uma consequência de $b_i + \sum \beta_i = \sum \alpha_i$, não por aplicação das proposições 3.5 e 3.6, tal como é afirmado na citação anterior, mas pela proposição 3.11. Apenas se aplicariam tais proposições 3.5 e 3.6 se, em vez da série $\sum_i \sum \alpha_i$ fosse considerada a série formada por todos os elementos positivos da série $a_1, a_2, a_3, \ldots$, que poderíamos denotar por $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$. Conforme nos é apresentada esta prova, poderemos apenas afirmar que para concluir (3.3) se usou a propriedade "igual adicionado a igual dá igual", isto é a proposição 3.11. Será por esta razão que a igualdade
$\sum_i (b_i + \sum \beta_i) = \sum_i (a_1^i + a_2^i + \cdots)$ é uma trivialidade.

3.3.8 Reformulação do critério de somabilidade

Para deduzir o critério de somabilidade de séries compostas de grandezas numéricas contendo todo o tipo de elementos, consideram-se três casos: quando a soma destas

[89] *Id., ibid.*.

grandezas é formada apenas por elementos positivos; quando tal soma contém apenas números negativos; ou, finalmente, quando a soma admita números dos dois tipos[90].

Admitamos inicialmente que a série $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é composta apenas de termos positivos, os quais podem, contudo, conter elementos positivos e elementos negativos. Pela definição 3.11 sabemos que a soma $\sum a_i$ é finita se também o forem as somas dos elementos positivos e dos elementos negativos da série, considerados separadamente. Vejamos que a condição de $\sum a_i$ ser finita é também uma condição suficiente para que sejam finitas as somas dos seus elementos positivos e dos elementos negativos.

Pela alínea b) da proposição 3.12 a soma finita $\sum a_i$ pode transformar-se numa soma $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i + \ldots$ de grandezas compostas apenas por elementos positivos. Por outro lado, cada α_i tem valor positivo. Portanto, pela alínea a) da mesma proposição 3.12, α_i pode transformar-se numa diferença cuja parte negativa tem um valor absoluto que pode ser tomado tão pequeno quanto se queira. Sendo então $\alpha_i = b_i - c_i$, para cada *i*, poderemos, em particular, considerar $c_i < \alpha_i$. A soma $\sum c_i$ é finita, uma vez que $\sum \alpha_i$ também é finita. Mostremos que também $\sum b_i$ é finita. Para *x* arbitrário, tem-se:

$$\sum_{\nu=1}^{x} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{x} (\alpha_\nu + c_\nu) = \sum_{\nu=1}^{x} \alpha_\nu + \sum_{\nu=1}^{x} c_\nu.$$

Como $\sum \alpha_i$ e $\sum c_i$ são grandezas finitas, existem números g e h tais que $\sum_1^\infty \alpha_\nu < g$ e $\sum_1^\infty c_\nu < h$. Logo $\sum_1^\infty b_\nu < g + h$, o que significa, por definição que $\sum b_i$ tem valor finito.

Portanto, se existir um número g maior do que a soma de quaisquer números escolhidos entre $a_1, a_2, a_3, \ldots$, isto é, se esta série for finita, é possível transformar $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ de tal modo que tanto os membros positivos como os membros negativos, por si, tenham uma soma finita. O mesmo é válido se a série $a_1, a_2, a_3, \ldots$ for composta apenas por membros negativos. (Neste caso, bastaria aplicar o raciocínio anterior à série de membros positivos $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$, designando a'_i o oposto de a_i.). E caso a série contenha membros positivos e negativos misturados, concluímos o mesmo já que os membros positivos e negativos, tomados por si, têm de dar uma soma finita.

Assim sendo, a condição de a soma de uma qualquer série ser finita é uma condição necessária e suficiente para que tanto os membros positivos como os membros negativos dessa série sejam finitos. Será utilizando o conceito de valor absoluto de um número que Weierstrass apresenta de um modo genérico o *critério de somabilidade*, o qual enunciamos na proposição que se segue.

Proposição 3.15 "Para que uma soma de infinitas grandezas numéricas seja finita, é necessário e suficiente que exista uma dada grandeza finita g que seja maior do que a soma

[90] *Id.*, *ibid.*, p. 32.

formada de tantas das grandezas numéricas quantas se quiser, tomadas as gran-dezas no seu valor absoluto."[91]

3.3.9 Séries condicionalmente convergentes e séries incondicionalmente convergentes

Este novo critério de somabilidade postula quando é que uma série de Weierstrass define um certo número. Mas, para que se obtenha um tal número (real), é necessário concretizar o valor dessas somas de infinitas parcelas. Esta é, portanto, segundo o matemático, a altura apropriada para distinguir as suas séries das séries que ele próprio designa de "usuais"[92]. O essencial desta diferença é que, enquanto as grandezas numéricas de Weierstrass podem ser adicionadas por uma qualquer ordem (e a comprová-lo estão todas as definições subjacentes ao conceito de série somável), a soma de uma série dita "usual" apenas pode ser obtida por uma ordem bem determinada. A saber, adicionando a a_1 o termo seguinte, a_2; a esta soma, s_2, o número a_3; ao número resultante, s_3, o número a_4, e assim por diante, obtendo a reduzida s_n da série. Ora, obviamente que tal procedimento pressupõe uma ordenação dos termos da série, e se, à medida que n cresce, s_n convergir para um determinado número a, então diz-se que a é a soma da série "usual".

Para esclarecer que esta independência na ordenação dos membros de uma série é verificada nas séries que designa por somáveis, mas não nas usuais, Weierstrass apresenta o exemplo da série de elementos

$$(3.4)\quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots .$$

Exemplo 3.4: Invocando a definição 3.11 de grandeza finita, Weierstrass limita-se a afirmar que esta série não é somável, já que tanto a soma dos seus elementos positivos como a soma dos elementos negativos são grandezas infinitamente grandes. De fato, atendendo a que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}}+\underbrace{\cdots}_{\geq\frac{1}{4}}+\cdots,$$

a soma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ dos elementos negativos da série é, por definição, infinitamente grande. O mesmo se conclui relativamente à soma dos elementos positivos, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$, uma vez que:

[91] *Id.*, *ibid.*, p. 33.
[92] *Id.*, *ibid.*.

$$1+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}_{\geq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}}_{\geq\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}}+\underbrace{\cdots}_{\geq\frac{1}{4}}+\cdots,$$

Não obstante, segundo a definição usual de soma como $\lim(s_n)$, a série possui uma soma; mas esta não é independente da ordenação dos membros;
$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$
dá uma soma diferente da [dada por] $\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$.[93]

Apesar de Weierstrass não justificar que a série inicial (2.3) é convergente[94], pode provar-se que ela converge para log 2. Tal valor obtém-se por desenvolvimento em *série de Taylor* da função log (*x* + *1*), tomando *x* = 1.

A razão pela qual as somas

$$(3.5)\ \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

e

$$(3.6)\ \left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

têm valores diferentes também não é apresentada por Weierstrass. Em todo o caso, vejamos uma justicação para que tal suceda. Com efeito, a primeira das somas representa o limite das somas reduzidas de ordem par, s_{2n} , da série inicial (3.4), que converge para log 2. Portanto, também a soma (3.5) será igual a log 2. Já a soma (3.6) pode obter-se através de operações aritméticas sobre a série inicial. Como a série inicial (3.4) é convergente, podemos multiplicar os seus termos por $\frac{1}{2}$. Sendo

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\dots$$

a sua soma, $\frac{s}{2}$ pode ser escrita na forma $0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0-\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}\dots$. Adicionando as duas séries convergentes anteriores, de somas *s* e $\frac{s}{2}$, obtém-se

$$(3.7)\ \frac{3s}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\dots.$$

[93] *Id.*, *ibid.*, p. 34.
[94] É de notar que Weierstrass não utiliza a designação de série convergente. Tais séries são para o matemático aquelas para as quais a soma s_n (usualmente designada por soma parcial) se aproxima dum limite, para *n* crescente.

Como a soma pretendida (VI) é o limite das somas reduzidas s_{3n} da série cuja soma, $\frac{3s}{2}$, é dada por (VII), teremos:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\neq\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\cdots,$$

conforme pretendido.

As justificações que acabamos de apresentar ilustram a possibilidade de ser aplicada a associatividade em séries usuais. O que distingue estas séries das de Weiers-trass é o fato de já não se poder dizer o mesmo acerca da propriedade comutativa. Atualmente, designamos por comutativamente convergente toda a série cuja soma não se altera se efetuarmos uma qualquer reordenação nos seus termos[95]. Desta forma, pode-remos identicar as séries somáveis de Weierstrass com as séries usuais ditas comuta-tivamente convergentes.

Por estas razões se compreende que Weierstrass refira que a soma $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$ se represente por

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}$$

apenas convencionalmente, tendo em rigor de denotar-se por:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right].$$

As diferenças apresentadas justicam então que sejam definidas duas terminologias que distingam estes dois tipos de séries: as *incondicionalmente convergentes*, como sendo aquelas definidas por Weierstrass (cumprindo o critério de somabilidade), e as *condicionalmente convergentes*, dependentes da ordenação dos membros. E é exatamente para as séries incondicionalmente convergentes que Weierstrass arma desenvolver a teoria que se segue, com a qual completa a construção do conjunto dos números reais.

3.3.10 Reformulação da operação de multiplicação

Na secção *Multiplicação de números que são compostos de elementos arbitrários*, da redação de Hurwitz[96], atribui-se um significado aos diferentes produtos possíveis entre a unidade positiva e a unidade negativa, bem como à multiplicação entre partes exatas desta última unidade. Uma vez que as grandezas numéricas são combinações lineares (fi-

[95] Uma série $\sum a_n$ é comutativamente convergente se para toda a bijecção $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, pondo-se $b_n=a_{\varphi(n)}$, a série $\sum b_n$ é convergente e $\sum a_n=\sum b_n$: veja-se (Lima, 1992), p. 118.
[96] Hurwitz (1878, p. 34)

nitas ou infinitas) destas unidades e das suas partes exatas, veremos desta forma estendida a operação de multiplicação a todo o tipo de grandezas. Desta forma, a definição do produto de dois números constituídos de elementos arbitrários será enunciada como sendo uma simples extensão da definição 3.6 relativa a números finitos.

Definição 3.15 O produto de dois números compostos de elementos arbitrários é dado pelo agregado de todos os produtos possíveis dos elementos de um pelos elementos do outro.

Para definir o produto entre a unidade negativa e a unidade positiva, Weierstrass parte do princípio que para números constituídos de elementos negativos é ainda válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, $(a + b)\,c = ac + bc$. Então, $(a+b')c+bc = ac+b'c+bc = (a+b'+b)c$ ou, pelo fato de

$a+b'+b = a,\ ac = ac+b+c+bc$.

Mas isto signica que $b'c$ é o oposto de bc, ou seja,

$$(-b)c = -(bc)\,.$$

Donde, o cálculo dos diferentes produtos $(-1)(+1)$, $1\cdot(-1)$ e $(-1)(-1)$ seja imediato.

A argumentação utilizada para obter o produto de partes exatas da unidade negativa, envolve apenas o conceito de parte exata desta unidade e o fato de $(-1)\cdot 1 = -1$. Supõe-se que deva ainda verificar-se a comutatividade na operação multiplicação. Então, da igualdade:

$$\left(-\frac{1}{m}-\frac{1}{m}-\frac{1}{m}\dots\ m\ \text{parcelas}\right)\left(+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\dots\ n\ \text{parcelas}\right) = (-1)\cdot 1 = -1,$$

vem que $-1 = m\cdot n\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{n}$, o que significa que $\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{n}$ é a $m.n$-ésima parte exata da unidade negativa. Portanto,

$$\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{n} = -\frac{1}{m\cdot n}\,.$$

De uma forma semelhante, se obtêm os produtos

$$\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{n} = -\frac{1}{m\cdot n}\ \text{ e }\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m\cdot n}\,.$$

Para completar os resultados acerca da multiplicação de dois quaisquer números, é provado que o produto de dois números finitos (constituídos quer por quantidades positivas, quer por quantidades negativas) é ainda finito. Esta prova irá suprimir a falha de na secção 3.2.3.3 Reformulação da operação multiplicação tal não ter sido demonstrado para números finitos compostos apenas por elementos positivos.

Proposição 3.16 Dados os números finitos $a-b=a+b'$ e $c-d=c+d'$, também o seu produto tem um valor finito.

Demonstração: Por aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que se supôs ser válida, e da relação $(-b)c=-(bc)$ cuja validade se deduziu, tem-se:

$$(a+b')(c+d')=ac+(ad)'+(bc)'+bd=ac-ad-bc+bd.$$

Sendo composto de membros positivos e negativos, este produto será, por definição, finito se também o for cada uma das parcelas da soma anterior. Ora, isto decorre de imediato das definições dos diferentes produtos entre a unidade positiva e a unidade negativa, e da hipótese de $a-b$ e $c-d$ serem finitos.

Estando então definida, na sua forma mais geral, a operação de multiplicação, justificar-se-ia que Weierstrass demonstrasse agora todas as propriedades desta operação aritmética. No entanto, limita-se a afirmar que, para este "domínio numérico ampliado", esta é ainda uma operação unívoca, sendo ainda válidas todas as propriedades abordadas ao longo do curso.

3.3.11 Operação de divisão de números arbitrários

Até ao momento, a operação de divisão foi apenas considerada para números usuais e números complexos (definição 1.9). Dados arbitrários números usuais a e c, para que o número $b=\frac{c}{a}$ desta definição fosse dotado de algum sentido, introduziram-se as *partes exatas da unidade.* À custa destes elementos formaram-se dois tipos de grandezas numéricas: aquelas constituídas por uma quantidade finita de elementos (os números usuais mistos) e aquelas formadas por infinitos elementos. E para todas estas grandezas, bem como mais recentemente para aquelas que igualmente contivessem elementos negativos, foi estendida sucessivamente a operação de multiplicação. Dada a proximidade entre as operações de divisão e multiplicação, podemos pois entender que a operação de divisão tenha sido implicitamente estendida a todo o tipo de grandezas. E, uma vez que na secção anterior acabamos por desenvolver toda a teoria acerca da operação de multiplicação, a teoria relativa à operação de divisão entre dois quaisquer números estará agora facilitada.

Definição 3.16 Sejam *a* e *b* dois quaisquer números. O número *c* que satisfaz a igualdade *c.b = a,* é denotado pelo símbolo *a : b* ou $\frac{a}{b}$.

Curiosamente, nesta definição[97], não é excluído o caso em que b toma o valor 0. E não encontramos na redação de Hurwitz uma terminologia do tipo "*c* é igual ao quociente entre *a* e *b*".

Para que a operação de divisão fique completamente caracterizada, é necessário demonstrar que, quaisquer que sejam os números *a* e *b*, o número $\frac{a}{b}$ existe e assume um valor finito. Da mesma forma, Weierstrass não exclui nesta prova o caso de o número *b* ser 0.

Proposição 3.17 "[...] existe sempre um número c que, se a e b forem dois outros números dados, satisfaz a igualdade $c \cdot b = a$."[98]

Demonstração: Repare-se que a existência de *c* depende da existência do número $\frac{1}{b}$. É que, sendo $\frac{1}{b} \cdot b = 1$, tem-se $a \cdot \frac{1}{b} \cdot b = a$ e, portanto, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Se tal número $\frac{1}{b}$ existir e for finito, podemos então aplicar a teoria da operação de multiplicação, e afirmar que a operação de divisão é igualmente uma operação unívoca, em que $\frac{a}{b}$ um número finito.

Inicialmente considera-se o caso em que *b* é positivo. A existência do número $\frac{1}{b}$ é provada para ambos os casos em que *b* seja composto de uma quantidade finita ou infinita de elementos. Finalmente, prova-se a existência de $\frac{1}{b}$ quando *b* é negativo.

- Se *b* for positivo e composto de finitos elementos, é imediato que, pelas transformações definidas na secção 2.1 *Comparação de números usuais mistos*, *b* pode ser escrito na forma $\mu \cdot \frac{1}{n}$, onde μ e *n* são múltiplos da unidade. Então é imediato que $\frac{1}{b} = n \cdot \frac{1}{\mu}$, já que $\frac{1}{b} \cdot b = n \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \mu \cdot \frac{1}{n} = 1$.
- Se *b* for composto de infinitos elementos, pode sempre encontrar-se um múltiplo da unidade *m* de tal modo que $m \geq b, m - 1 < b$. Como a igualdade *m* = *b* conduz ao caso já considerado, supõe-se que *m* > *b*, *m* – 1 < *b*. Assim, $b = m - b_1$, sendo $b_1 < 1$. A argumentação segue com a prova de que $\frac{1}{b} = \frac{1}{m-b_1}$. Ora, das desigualdades:

$$\frac{1}{m-b_1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m-b_1)},$$

$$\frac{b_1}{m(m-b_1)} = \frac{b_1}{m^2} + \frac{{b_1}^2}{m^2(m-b_1)},$$

[97] *Id., ibid.*, p. 36.
[98] *Id., ibid.*.

$$\frac{{b_1}^2}{m^2(m-b_1)} = \frac{{b_1}^2}{m^3} + \frac{{b_1}^3}{m^3(m-b_1)}, \dots$$

obtém-se

$$\frac{1}{m-b_1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} \cdot b_1 + \frac{1}{m^3} \cdot {b_1}^2 + \cdots .$$

Sendo $\frac{1}{m-b_1}$ a soma de uma série, para provar que $\frac{1}{m-b_1} = \frac{1}{b}$, torna-se necessário demonstrar que este número tem um valor finito, além de que o seu produto por *b* é igual a 1.

Como $b_1 < 1$, vale a desigualdade:

$$ {b_1}^a \frac{1}{m^{a+1}} < \frac{1}{m^{a+1}},$$

donde a soma de uma quantidade arbitrária de membros da série, $\sum_{r=1}^{\nu} {b_1}^{r-1} \frac{1}{m^r}$, é tal que:

$$\sum_{r=1}^{\nu} {b_1}^{r-1} \frac{1}{m^r} < \sum_{r=1}^{\nu} \frac{1}{m^r} < \frac{1}{m-1} .$$

Sendo então $\frac{1}{m-1}$ maior do que a soma de tantos membros da série quantos se quiser, $\frac{1}{m-b_1}$ terá, pela definição 3.4, um valor finito.

Resta apenas mostrar que $b \cdot \frac{1}{m-b_1} = 1$. Esta igualdade decorre de imediato da aplicação, aos números *b* e $m - b_1$, da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de grandezas compostas de elementos positivos, relação esta que abordamos na secção 3.2.3.3 *Extensão da operação multiplicação.* Com efeito,

$$b \cdot \frac{1}{m-b_1} = (m-b_1)\left(\frac{1}{m} + b_1\frac{1}{m^2} + {b_1}^2\frac{1}{m^3} + \cdots\right) =$$

$$= 1 + b_1 \cdot \frac{1}{m} + {b_1}^2 \cdot \frac{1}{m^2} + \cdots - b_1 \cdot \frac{1}{m} - {b_1}^2 \cdot \frac{1}{m^2} - \cdots = 1$$

Finalmente, se *b* for um número negativo, atendendo ao que já mostramos e à extensão da operação de multiplicação abordada na secção anterior, é imediato que $\frac{1}{b}$ existe. De fato, sendo –*b* positivo, o número $\frac{1}{-b}$ existe e cumpre a igualdade $(-b)\left(\frac{1}{-b}\right) = 1$. Por outro lado,

$$\left(\frac{1}{-b}\right)(-b) = +\frac{1}{b} \cdot b = 1$$

Logo $\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$, donde se conclui que o número $\frac{1}{b}$ é dado por:

$$\frac{1}{b} = -\left(\frac{1}{-b}\right).$$

Podemos afirmar então que o número $c = \frac{a}{b}$ existe para todos os casos possíveis das grandezas *a* e *b*.

4. Considerações acerca da teoria dos números irracionais de Weierstrass

A possibilidade de se obterem grandezas comensuráveis cada vez mais próximas de uma grandeza incomensurável, sem que contudo a conseguissem atingir, é conhecida dos matemáticos já desde os Pitagóricos. E é também partilhando desta ideia que Weierstrass define os seus números irracionais.

> Na vizinhança de qualquer grandeza numérica irracional há contudo uma quantidade arbitrária de grandezas numéricas racionais, que se lhe tornam arbitrariamente próximas. Deste modo, qualquer grandeza numérica irracional arbitrária é um limite de racionais, quer dizer, dos que neste caso estão definidos. (THIEME, 1886, p. 60).

Em todo o caso, reconhece que, partindo da existência de grandezas racionais, não tem sentido definir os irracionais como limites dessas grandezas, porque começamos por não poder saber se ainda haverá outras além das racionais. A forma como construiu a sua teoria dos números irracionais permitiu-lhe evitar este erro que alguns matemáticos, nomeadamente Cauchy, haviam cometido na obtenção de um número irracional (CAUCHY, 1821, p. 19). Os seus números, que designa por *grandezas numéricas*, são definidos como conjuntos de certos elementos. Desta forma, para sabermos o "valor" que uma certa grandeza representa, teremos de adicionar os elementos que a compõem. E é exata-mente esta ideia de que um número é um *conjunto* de elementos, e não a *soma* dos seus elementos constituintes que vai permitir a Weierstrass escapar da suposição da existência *a priori* dos números irracionais. Aquelas grandezas de Weierstrass compostas de uma infinidade de elementos que possuem um valor finito mas que, contudo, não são iguais a nenhum número usual misto (ou seja, número racional), identificam-se com os números irracionais. Portanto, um irracional é, segundo a teoria de Weierstrass, uma série de determinados termos, mas não a soma dessa série[99]. Assim, tal como é observado por Boyer[100], o irracional $\sqrt{2}$ não será definido como o limite da sucessão de números racionais 1; 1, 4; 1, 41; 1, 412; ..., até porque o conceito de *sucessão* não está presente na teoria de Weierstrass; $\sqrt{2}$ será antes o próprio agregado de vários elementos, a saber, a unidade positiva 1, 4 partes exa-

[99] Séries estas que, tendo em conta a sua formação, diferem das séries usuais por não pressuporem uma ordenação dos seus termos.

[100] (Boyer, 1949), p. 286.

tas $\frac{1}{10}$, 1 parte exata $\frac{1}{100}$, 2 partes exatas $\frac{1}{1000}$, e assim por diante, considerados por uma qualquer ordem, agregado este sujeito à condição de que toda a soma de um número finito destes elementos seja inferior a um certo número racional.

Estendendo a todos os tipos de grandezas numéricas as operações aritméticas, Weierstrass construiu um domínio numérico que identificamos com o conjunto dos números reais. E porque podemos interpretar, tal como já fizemos, a relação de igualdade entre quaisquer grandezas numéricas como sendo uma relação de equivalência, o conjunto dos números reais será o conjunto dos representantes das classes de equivalência para esta relação. Isto sucederá quando consideramos tal relação definida no conjunto de todas as grandezas numéricas que possuam um valor finito.

O domínio das grandezas numéricas de Weierstrass compreende, portanto, tanto as grandezas racionais, como também as irracionais. Razão pela qual Weierstrass afirma que pode agora considerar as grandezas numéricas irracionais como limites de grandezas racionais variáveis.

> [...] de um número formado por uma quantidade infinita de elementos, podemos sempre destacar tantos elementos, que o resto seja menor do que uma grandeza arbitrariamente pequena #; portanto há uma quantidade infinita de números racionais que se aproximam do irracional consi-derado, tanto quanto se quiser. (BOYER, 1949, p. 286)

Referências

BOYER, Carl B. **The History of the calculus and its conceptual development.** New York: Springer-Verlag, 1949.

CAUCHY, Louis. **Oeuvres Complètes.** II Série Tome III. Paris: Gauthier-Villars, 1821.

DANTSCHER, Victor. **Vorlesung über die weierstrasssche Theorie der irratio-nalen Zahlen.** Leipzig: Teubner. 1908.

DUGAC, Pierre. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. **Archive for History of Exact Sciences,** 10, 41–176, 1973.

HERMITE, Émile. **Oeuvres de Charles Hermite.** Tome III. Paris: Gauthier-Villars, 1912.

HETTNER. Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen. [s.l.]: [s.n] In: In: DUGAC, Pierre. 1973. “Eléments d'analyse de Karl Weierstrass”. **Archive for History of Exact Sciences,** 10, p. 125-128, 1874.

HURWITZ, Adolf. Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen. [s.l.]: [s.n] In: DUGAC, Pierre. 1973. “Eléments d'analyse de Karl Weierstrass”. **Archive for History of Exact Sciences,** 10, p. 96-118, 1878.

SCHWARZ, Differentialrechnung, Ausarbeitung der Vorlesung an dem Königlichen. [s.l.]: [s.n] In: DUGAC, Pierre. 1973. “Eléments d'analyse de Karl Weierstrass”. **Archive for History of Exact Sciences,** 10, p. 118-124, 1861.

THIEME. Ausgewählte Kapitel aus der Funktioneblehre. [s.l.]:[s.n] In: DUGAC, Pierre. 1973. “Eléments d'analyse de Karl Weierstrass”. **Archive for History of Exact Sciences,** 10, p. 129-135, 1886.