

**ELASTICIDADE PREÇO-DEMANDA:
construção de um modelo matemático em um
contexto histórico como exemplo para ação educacional**

Plínio Zornoff Táboas*

Resumo

Este trabalho apresenta, a título de ação educacional no campo de estudos e pesquisas da História na Educação Matemática, uma concepção de modelagem matemática e suas etapas de confecção, com uma aplicação na análise do conceito de elasticidade preço-demanda e suas possibilidades de auxiliar o planejamento e o gerenciamento de mercados em monopólio segundo o modelo de oferta e demanda e a teoria do valor-utilidade.

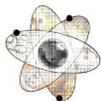
Palavras-chave: Educação Matemática. História na Educação Matemática. Ação Educacional. Modelagem Matemática. Elasticidade Preço-Demanda.

Abstract

This work will present, as an educational action in the area of studies and researches of the History in the Mathematical Education, an idea of mathematical modeling and its parts of construction, with one application in the analysis of the concept of Price-Demand Elasticity and their possibilities to auxiliary in the plan and the management of markets in monopolies according to the Offer-Demand Model and the Utility-Value Theory.

Keywords: Mathematic Education. History in the Mathematic Education. Education Action. Mathematical Modeling. Price-Demand Elasticity.

* Doutor e Mestre em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro. Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos. Docente da Universidade Federal do ABC – UFABC – Centro de Matemática, Computação e Cognição – CMCC



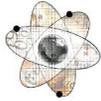
Duas pequenas notas iniciais

Este trabalho é um desdobramento teoricamente mais profundo de um estudo esquemático publicado sob o nome de *Elasticidade Preço-Demanda: Modelagem Matemática e Monitoramento de Mercados* na revista *Primeiros Ensaios – FAE* (TÁBOAS, 2003, p.104-110). A maior profundidade se dá em vários aspectos:

- I. Concepção fundamentada de modelagem matemática;
- II. Referenciamento detalhado de toda argumentação histórica a respeito da construção dos conceitos de economia e de sua aplicação;
- III. Explicitação e exemplificação dos dois tipos de pressões sobre preço e não apenas a do produtor;
- IV. Referenciamento às obras que poderão dar suporte ao uso adequado e rigoroso das ferramentas matemáticas requisitadas pelo modelo;
- V. E, principalmente, explicitação de todas as etapas do processo de modelagem matemática em consonância com a concepção agora apresentada.

Na verdade, então, este trabalho se apresenta como tendo sido inspirado por outro apenas embrionário no que diz respeito às possibilidades de utilização de um tema de estudo como suporte para estudo da matemática em forte interação com o ambiente no qual está inserida; ambiente, este, que é fruto de uma complexa evolução histórica.

Além disso, este trabalho se inspira, também, na idéia de se fazer história a partir do estudo e da análise de temas, tomados de um conjunto universal, que se entrelaçam e se interpenetram ao longo do tempo ou, melhor ainda, que se comportam como um feixe de trajetórias diversas que se combinam e se contrapõem (ver concepções do historiador espanhol Josep Fontana, em Fontana (1998) e uma sua aplicação em Fontana (2000)).



Introdução

O Prof. Rodney Carlos Bassanezi ao apresentar, juntamente com Wilson Castro Ferreira Jr., sua visão para *Equações Diferenciais como Matemática Aplicada*, no livro *Equações Diferenciais com Aplicações* (BAS-SANEZI & FERREIRA Jr., 1988, p. 3), diz “considerar a ‘Matemática Aplicada’ não exatamente como uma Ciência, mas como uma atitude no estudo da Matemática dentro do contexto científico em que ela se desenvolve, e não como uma disciplina estanque e descomprometida”.

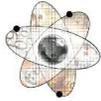
Sob esse ponto de vista é que se desenvolverá o estudo que se segue, dentro de limitações que serão analisadas assim que forem interpostos os problemas que as explicitarem.

Na verdade, o que se deseja aqui é a confecção teórica de uma *Modelagem Matemática* que contextualize o conceito de *Elasticidade Preço-Demanda* na análise econômica de *mercado* em meio à complexidade de seu desenvolvimento técnico na história.

Outro trabalho, que daria continuidade e completaria a visão de *Modelagem Matemática* consolidada por este, é o de coleta de dados realizada diretamente no *mercado* para exemplificação e categorização de bens de consumo de acordo com o nosso conceito chave: *Elasticidade Preço-Demanda*.

Já temos, pois, vários elementos que necessitam ser explicados ou mesmo conceituados com detalhes, nomeadamente, *modelagem matemática*, *mercado* e *elasticidade preço-demanda*.

Antes de qualquer explicação, no entanto, é importante relevar a tentativa de que este estudo seja portador de uma postura educativa que preconize uma *construção solidária*, como concebem os Professores Antonio Miguel e Maria Ângela Miorim, entre conhecimentos matemáticos e históricos, e mesmo outros conhecimentos quaisquer induzidos por uma questão-problema que suscite ambos, “*não (como) uma superposição cata-*



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

lisadora das dificuldades específicas a cada campo distinto, mas (como) a possibilidade de instauração de uma reciprocidade esclarecedora e superadora” (MIGUEL & MIORIM, 2008, p. 68).

Assim, podemos averiguar seguidamente, mas não hierarquicamente, uma vez que a própria *construção solidária* inviabiliza essa atitude, os elementos a serem analisados e já citados acima.

Modelagem Matemática

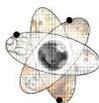
É bastante utilizado, em situações as mais diversificadas possíveis, o termo modelagem matemática. Porém, as idéias desenvolvidas por Rodney Carlos Bassanezi (BASSANEZI & FERREIRA Jr., 1988; BASSANEZI, 2006) e Eduardo Sebastiani Ferreira (FERREIRA, 2006) darão suporte ou mesmo se mesclarão ao esquema que norteará este estudo.

Para uma primeira aproximação do que deve ser entendido por modelo matemático, o Prof. Rodney Bassanezi preconiza a necessidade da

... existência de um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa. Com isto, transpõe-se o problema de alguma realidade para a Matemática onde será tratado através de teorias e técnicas próprias desta Ciência; pela mesma via de interpretação, no sentido contrário, obtém-se o resultado dos estudos na linguagem original do problema. (BASSANEZI, 2006, p. 25).

Essas palavras carregam um claro otimismo na interligação do real ao matemático, porém um otimismo condicionado ao aposto ‘*sem ambiguidades*’.

Já desprovido desse otimismo, ou sem exigir a ausência de ambiguidades, um esquema dado por R. R. McLone (1984) sintetiza modelagem matemática como um duplo processo de formalização e interpretação (fi-



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

gura 1):

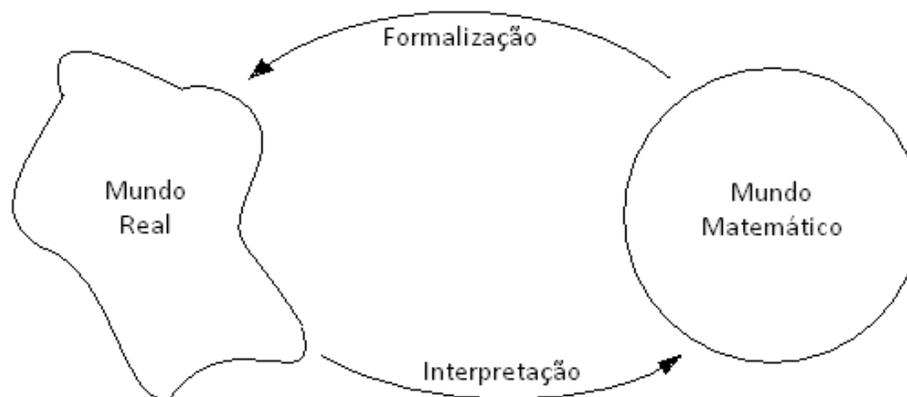


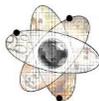
Figura 1- Esquema dado por McLone

O mundo real é interpretado em termos matemáticos e a formalização matemática dá elementos para observar a realidade. Cabe atentar para o fato de que essa formalização *não é* e, portanto, *não gera* a realidade.

No entanto, o refinamento de todo esse processo de modelagem matemática é fornecido por Rodney Bassanezi e Wilson Ferreira Jr. (BASSANEZI & FERREIRA Jr., 1988, p. 1-7) e passa pelo desenvolvimento das seguintes etapas sequenciais:

1. Experimentação;
2. Abstração;
3. Resolução;
4. Validação;
5. Modificação

Da experimentação são retiradas as variáveis que delimitarão um problema, sob o qual serão formuladas hipóteses, e que receberão um tratamento de simplificação às variáveis essenciais na linguagem matemática; problema que, então, será analisado no duplo processo interpre-



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

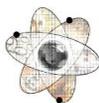
tação/formalização. Além disso, são retirados, também, dessa experimentação, os dados que alimentarão a resolução do equacionamento matemático. Essa solução técnica/matemática passará por uma averiguação do seu poder preditivo em uma comparação com a evolução do fenômeno que gerou a própria observação primeira. Se ela estiver em acordo com a realidade, então, será validado o modelo matemático, caso contrário, esse modelo passará por uma modificação.

Na verdade, acreditamos que sempre será possível uma modificação do modelo, uma vez que todo processo de *interpretação* não consegue ser totalmente fiel ao fenômeno observado. As modificações poderão ser efetuadas nas várias etapas do processo de modelagem, desde a escolha das variáveis até as medições retiradas da experimentação.

É importante ressaltar, aqui, o papel político/filosófico, nunca com isenção do observador ainda que se busque uma improvável *redução fenomenológica* (MERLEAU-PONTY, 2006), da escolha das variáveis como um dos mais significativos no processo de abstração e construção do modelo matemático, por revelar a capacidade de observação e compreensão do contexto em que evolui o fenômeno.

Há, ainda, outro aspecto importante a observar a respeito do processo de modelagem matemática: a pesquisa de campo. Ela se insere num conceito que é tão amplo como ou mais amplo do que a própria experimentação dentro do trabalho de modelagem, por conta de que se apresenta como recurso pedagógico que aciona todos os agentes envolvidos nesse processo de construção de conhecimento como parte de um Programa Etnomatemático, como descrito pelo Prof. Ubiratan D'Ambrosio em seus Etnomatemática (D'AMBROSIO, 2001) e Transdisciplinaridade (D'AMBROSIO, 2005).

O Prof. Eduardo Sebastiani Ferreira apresenta o seguinte esquema visual (FERREIRA, 2006, p. 80) que sintetiza a abrangência de processos de modelagens matemáticas em contexto histórico e etnográfico amplo, seguindo as idéias anteriormente apresentadas (figura 2).



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

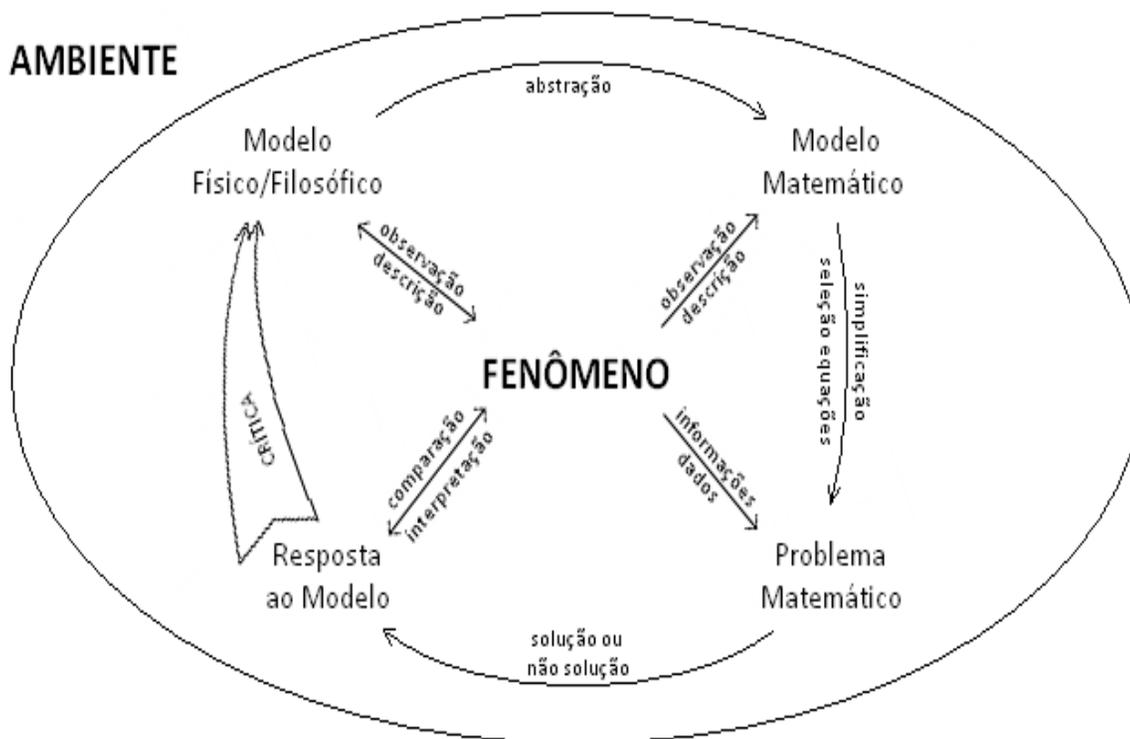
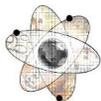


Figura 3 – Modelagem Matemática através de um esquema/síntese

A modelagem passa, dessa forma, por uma observação do fenômeno e sua conseqüente descrição (Modelo Físico/Filosófico), por uma abstração técnico/linguística (Modelo Matemático), pela simplificação que leva ao *problema matemático* associado ao foco da análise, pela investigação da sua solução ou não solução auxiliada pelas informações vindas da experimentação no mundo real e, por fim, passa pela comparação entre a *resposta ao modelo* e o próprio *fenômeno* em evolução no tempo. Caso o modelo tenha gerado respostas que se aproximam bem daquelas observadas no fenômeno evoluído no tempo, então o modelo é validado para utilização preditiva da realidade.

No entanto, um esforço dialético contínuo sempre é despendido na avaliação crítica do modelo, uma vez que as necessidades dos seus usuá-



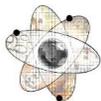
rios são mais ou menos refinadas em relação ao erro cometido entre *resposta do modelo e realidade*. Uma reavaliação crítica do modelo poderá interferir em quaisquer das suas etapas de construção original, seja na concepção físico/filosófica que se tem do fenômeno, na própria seleção de variáveis que constituem o modelo matemático, na simplificação e seleção de equacionamento que gera o problema matemático, ou até na reavaliação dos dados experimentais coletados a fim de alimentarem a busca por solução matemática. Ainda assim, não é verdade que a reavaliação do modelo gerará respostas mais precisas na comparação com a realidade sensível ou observável. Às vezes, a construção de um novo modelo pode mesmo gerar respostas piores. Isso, também, não quer dizer que as novas concepções estejam de todo erradas. O que queremos dizer com isso é que o refinamento de um modelo por reavaliação de etapas pode não ser o caminho ideal para melhorá-lo, por conta da complexidade do conjunto todo. Muitas vezes, tem-se que buscar um novo conjunto inteiro para descrição e interpretação do fenômeno no ambiente em que está inserido de tal forma a construir uma nova modelagem.

Em face dessas reflexões, é importante ter a clareza de que os modelos nem sempre evoluem positivamente em termos de resultados preditivos e que esse relativismo ou essa instabilidade não é apenas aparente, mas é parte integrante do processo de modelagem. E, além disso, também importa saber que refinamentos inseridos em modelos podem influenciar não necessariamente o ambiente, mas certamente mudam a concepção físico/filosófica que se tem desse ambiente.

Mercado

Uma concepção de mercado faz-se necessária agora sob pena de, abstendo-se dessa tarefa, não constituir-se qualquer *modelo* para análise e voltar-se para o empirismo completo. Assim, são três os seus constituintes: bem de produção ou bem de consumo ou serviço¹ (aquele que é objeto de troca e irá delimitar o mercado), consumidor (aquele que de-

¹ De agora em diante, por simplicidade, apenas *bem* ou *produto*.



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

manda o bem no mercado) e produtor (aquele que oferece o produto no mercado). Mas, não haverá mercado sem acordo de troca de bens e *valores* entre produtor e consumidor.

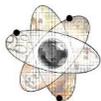
Teorias do Valor

Duas teorias, a do *Valor-Trabalho* e a do *Valor-Utilidade*, tentam dar conta não apenas de explicar a relação entre as partes envolvidas nos mercados, mas também como funcionam a repartição da renda e a acumulação de capital. São teorias que se valem de interpretações diferentes e opostas dos fenômenos econômicos e acabam não sendo eficazes, cada uma à sua maneira, apesar das suas utilidades, a primeira na construção de cenários macroeconômico e a outra na interdependência dos agentes de um mercado em monopólio (SINGER, 1998, p. 22 a 32).

A *Teoria do Valor-Trabalho* busca valorar todo bem em função do trabalho despendido na sua produção. É preciso, dessa forma, desnudar toda sua cadeia produtiva e identificar a contribuição de trabalho humano em cada etapa. É claro que há aqui a compreensão de que o trabalho humano despendido em tarefas que envolvem habilidades diversas em situações desiguais deve ser considerado diferentemente no cálculo, porém levando-se em consideração uma média (uma vez que para ter valor o bem carece de uma demanda normal, não basta ter sido produzido) de alguma forma estratificada a partir do trabalho cristalizado em cada produto (ARON, 2008, p. 209 a 216).

A complexidade dessa tarefa permite uma explicação integral de cada economia, mas essa mesma complexidade acaba por ser o seu maior defeito, pois ela não dá conta de explicar os mercados isoladamente. Como essa interpretação baseada na Teoria do Valor-Trabalho poderia explicar, por exemplo, mercados segmentados como o de carros: luxo, esportivo, popular, etc.?

Por outro lado, a *Teoria do Valor-Utilidade* explica de maneira eficaz cada mercado isoladamente e tem como fundamento valorar os bens pela



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

sua utilidade. Vejamos um exemplo: um casal e dois filhos. Os cônjuges trabalham em locais distintos e distantes, bem como seus filhos estudam em escolas diferentes. Um carro, utilizado como meio de transporte pela família, é de altíssimo valor. Um segundo carro acomoda bem melhor as necessidades de deslocamentos da família e é considerado de bom valor apesar de não ser imprescindível. Um terceiro carro não tem quase serventia alguma e gera muitos gastos, portanto não tem praticamente qualquer valor utilitário. A idéia, então, é que o valor do bem decai à medida que consumimos mais unidades e sua utilidade não desperta mais tanto interesse quanto antes.

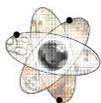
Economia de Mercado

Os países ditos de economia de mercado são aqueles em que os vários mercados constituintes buscam uma auto-regulação de preços/valores através da livre concorrência em atendimento às necessidades dos consumidores.

Adam Smith (1723-1790) foi a primeira e, provavelmente, a mais marcante influência do pensamento econômico moderno na defesa da Economia de Mercado. Foi ele quem fundamentou os princípios da economia não na estrutura mercantilista, que julgava a riqueza pela quantidade de moeda amealhada através do comércio, mas, sim, na quantidade de trabalho realizado e no padrão de vida das famílias (BUCHHOLZ, 2000, p. 19-20). É dele, também, a metáfora da “mão invisível” ao aceitar a idéia de que os mercados tendem a se equilibrar quando são confrontados os interesses dos produtores e dos consumidores em relação ao preço dos bens que delimitam esses mercados.

Modelo Oferta X Demanda

Em situação de monopólio, o modelo de oferta e demanda descreve individualmente os interesses de produtor e de consumidor e ressalta em



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

uma síntese gráfica a dinâmica do mercado sob a condução da “mão invisível” que orienta para o equilíbrio. Nesse modelo, a teoria do valor-utilidade é assumida como referencial para a interpretação do fenômeno. Essa escolha representa a adoção de um *modelo físico/filosófico* em nosso esquema de modelagem.

Como descrito anteriormente, a teoria do valor-utilidade indica que o consumidor, ao apossar-se de uma quantidade cada vez maior de um mesmo produto, tende a desvalorizá-lo. Assim, a atitude do consumidor é traduzida matematicamente através de uma curva suave, monótona e estritamente decrescente que é ajustada aos dados retirados do mercado por pesquisas estatísticas.

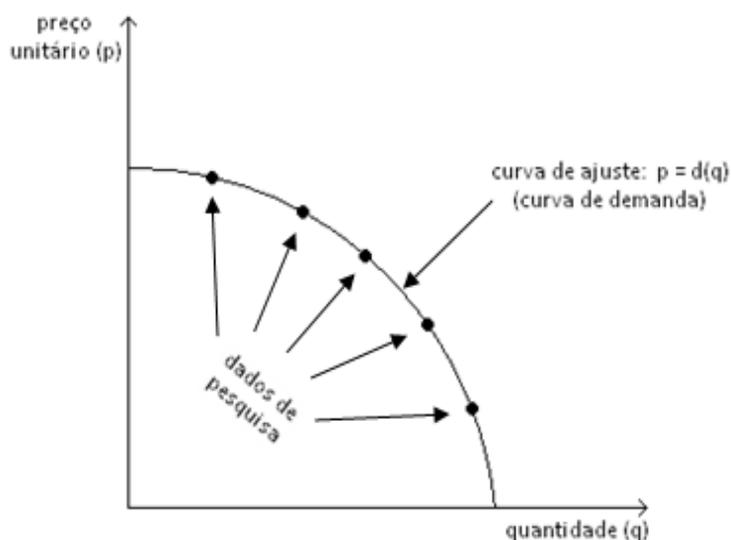
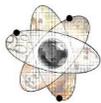


Figura 4 – Curva de demanda

Uma vez que os dados coletados diretamente no mercado geram um gráfico de dispersão, a assunção de que eles devem ser ajustados por uma curva suave, monótona e estritamente decrescente encerra, delimita, descreve exatamente o processo de *abstração* no nosso esquema de modelagem matemática.

O ajuste matemático da curva de demanda, que representa aqui o processo de *simplificação* ou de *seleção de equações*, pode ser feito com



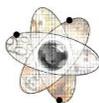
Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

diferentes tipos de funções como, por exemplo, exponencial, logarítmica, hiperbólica, geométrica, trigonométrica, polinomial ou linear, mas, independentemente da escolha, o Método dos Mínimos Quadrados é um bom caminho para a sua construção.

Para as funções de tipos trigonométrica, polinomial ou linear, esse método tem eficácia garantida pelo fato de estar estruturado num conceito objetivo de otimização ou, mais precisamente, de minimização da soma dos quadrados das diferenças entre os valores da função a ser ajustada e os valores coletados empiricamente, garantindo, assim, a melhor opção, ou tecnicamente, a melhor aproximação do conjunto de valores pesquisados pelo tipo de função escolhida.

No caso de funções exponencial, logarítmica, hiperbólica ou geométrica o Método dos Mínimos Quadrados não garante o melhor ajuste por minimizar não a soma dos desvios entre a função escolhida e os dados coletados, mas entre o recíproco da função aplicada e os dados coletados (função hiperbólica) ou entre uma variável que contenha o logaritmo da função e os dados coletados (funções exponencial, logarítmica ou geométrica). A função escolhida para fazer o ajuste dos dados é chamada de *regressão* da variável dependente na independente (DORN & MCCRACKEN, 1981, p. 401-444).

Tendo ainda a teoria do valor-utilidade como modelo filosófico, a atitude do produtor é descrita matematicamente por uma curva monótona, estritamente crescente e suave ajustada aos dados coletados no mercado.



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

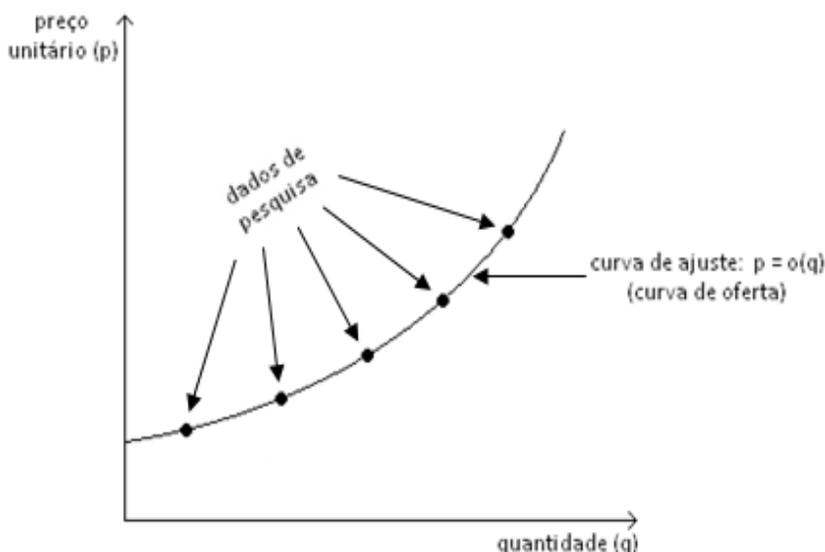
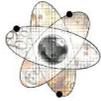


Figura 5 – Curva de oferta

Por esse modelo pode-se observar que o produtor tende a aumentar o preço unitário de seus bens à medida que ele é demandado em maior número ou com mais intensidade. Isso não condiz com a máxima da moderna economia de escala: *maior produção, menores custos, menores preços*. Bem, duas considerações de cunho histórico devem ser feitas aqui.

Primeira. A Revolução Industrial mal havia começado na Inglaterra do século XVIII (HOBSBAWM, 1997, p. 43-69) quando o pensamento econômico liberal iniciou sua fundamentação com Adam Smith (1723-1790) tirando suas impressões de economias ainda eminentemente agrárias como a da França, cujo modelo lhe era um pouco mais familiar e com o qual tinha um pouco mais de afinidade em função de sua proximidade com os fisiocratas franceses.² E, para entendermos o porquê da curva de oferta ser crescente, pensemos na situação do café brasileiro considerado internacionalmente de alta qualidade e que é produzido no Sul de Minas, divisa com São Paulo, mais especificamente em torno da cidade de Caconde-SP: em função de uma possível demanda crescente, haverá a necessidade de novas terras circunvizinhas para o plantio de mais café.

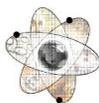
² Ver introdução de Maxim Behar e Norberto de Paula Lima a *Riqueza das Nações*, SMITH, 2001, c.1789, p. VII-XVI.



Por questões climáticas e geográficas, as novas terras poderão não gerar grãos de tão alta qualidade. Para garantir essa qualidade, investimentos pesados em insumos e equipamentos deverão ser feitos, o que implicará no aumento de custos e, conseqüentemente, no aumento de preço do produto final.

Segunda. O pensamento econômico liberal moderno concluiu já no século XX que não é a quantidade consumida que determina o preço e, sim, o contrário, ou seja, o preço determina o consumo. É o interesse em maximizar os lucros que justifica a curva de oferta crescente e o interesse em minimizar os gastos que justifica a curva de demanda decrescente.

Uma pequena observação face à essa segunda consideração: tradicionalmente, por conta das impressões aferidas dos trabalhos de Adam Smith, as curvas de oferta e de demanda possuem a quantidade no eixo x e o preço no eixo y do plano cartesiano em que estão representadas, dando a idéia de que a variável *quantidade* é independente e a variável *preço* é dependente, o que não condiz com o fato do preço determinar o consumo. Ainda, assim, por questões de hábito e salvaguarda histórica, esse modelo de oferta e demanda tem sido apresentado com a *quantidade* no eixo x e o *preço* no y . Matematicamente, isso não tem grande importância, até mesmo porque, com as funções de demanda e de oferta sendo concebidas como monótonas, estritamente decrescente a primeira e estritamente crescente a segunda, elas possuem inversas com as mesmas características (TÁBOAS, 2008, p. 76-77). No entanto, ao tabular os dados coletados diretamente da realidade, importa saber qual é aquele relativo à variável independente e qual à variável dependente, pois no processo de *interpolação* ou ajuste de uma curva aos dados do mercado, isso fará diferença: as *regressões* de y em x e de x em y com a escolha de um mesmo tipo de função não geram as mesmas expressões (DORN & MCCRACKEN, 1981, p. 406-412).



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

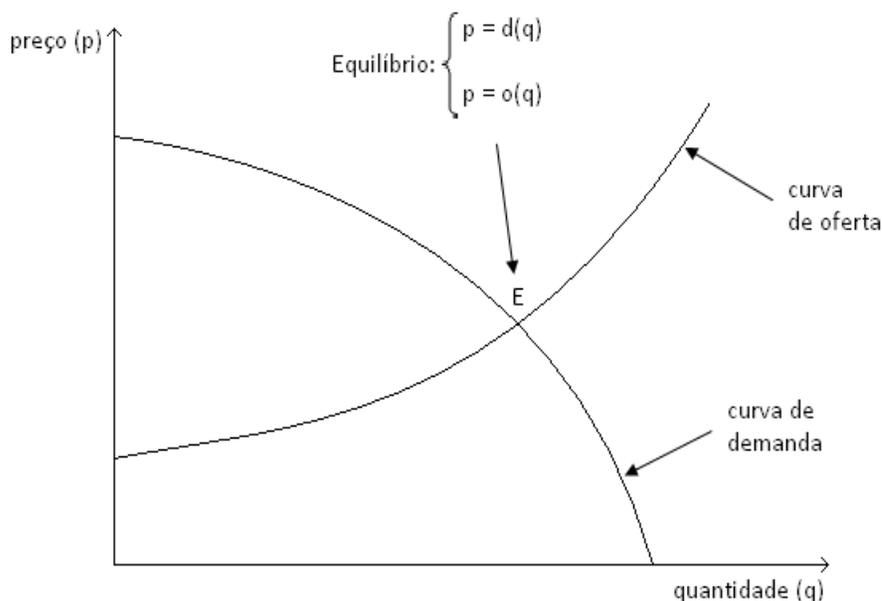
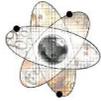


Figura 6 – Ponto de equilíbrio do mercado

A conclusão, então, após as considerações acima, é a de que o modelo de oferta e demanda pode ser revigorado, porém, mediante o foco na interpretação da luta de interesses de consumidores e produtores na busca de acordo para viabilizar o mercado. No modelo matemático, isso ocorre na interseção das curvas de oferta e de demanda, que é o considerado *ponto de equilíbrio* do mercado (figura 6). Esse ponto é descrito, portanto, como um par ordenado $E = (q_e, p_e)$ que é a solução do sistema de equações dadas pela demanda e pela oferta.

Agora, como esse modelo pode representar ou interpretar a dinâmica do mercado? Bem, as pressões sobre o preço alteram o equilíbrio do mercado, aumentando ou diminuindo o volume de negócios; influenciando, numa reação em cadeia, em contratações ou demissões nas empresas.

As pressões sobre o preço podem ser causadas pelas ações tanto do produtor como do consumidor. As pressões do produtor levam a uma diminuição da quantidade consumida quando há um aumento de preço e a um aumento no consumo em caso contrário.



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

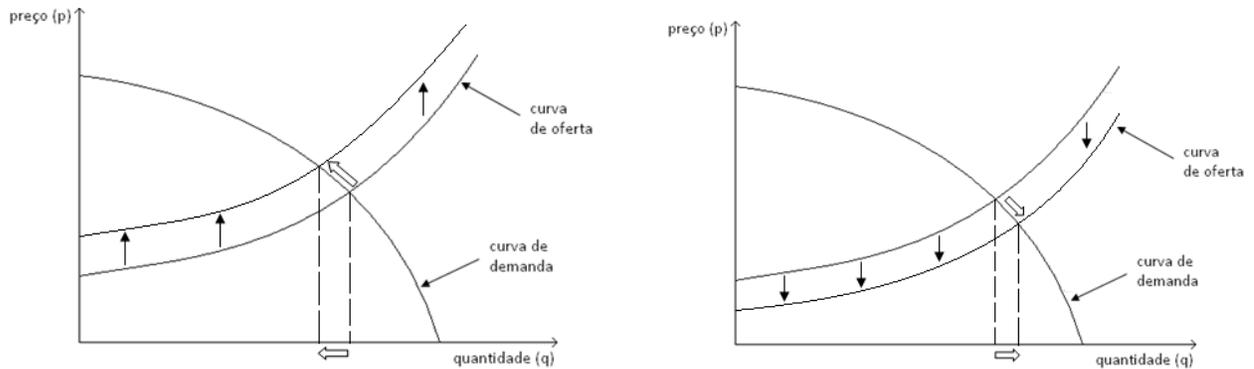


Figura 7

As pressões do consumidor também existem nos dois sentidos, forçando o preço para baixo ou para cima. Observamos, pelo modelo matemático, que pressão para baixo está acompanhada de diminuição do consumo e que pressão para cima está acompanhada de aumento no consumo!

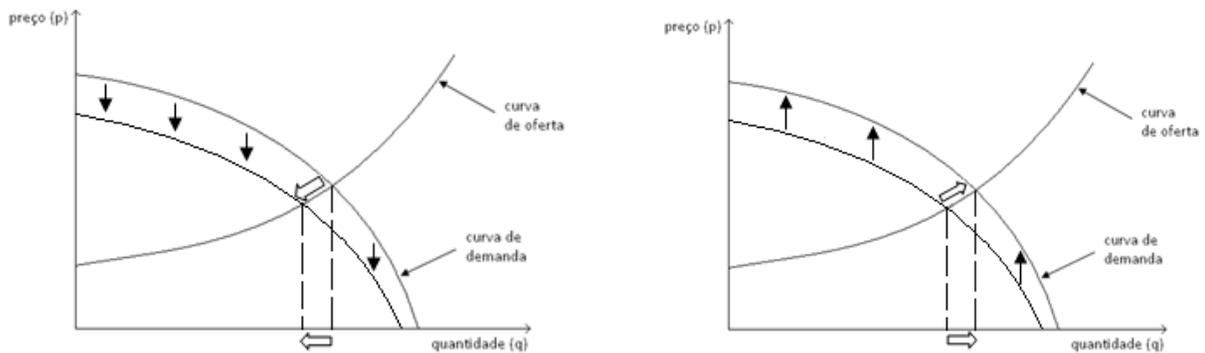
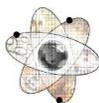


Figura 8

Ainda que pareçam contra-sensos, elas podem ocorrer em função de uma desvalorização do bem por parte dos consumidores ou em função de situação de desabastecimento, respectivamente. Essa situação de desa-



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

bastecimento é muito comum em economias com hiperinflação, muitas vezes consequência de países exauridos por exploração, em guerra ou em conflitos internos das mais diversas naturezas. O Brasil passou por uma situação dessas na virada da década de 1980 para a de 1990.

Neste estudo, iremos centrar nossos esforços em analisar as situações em que ocorre pressão por parte do produtor.

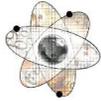
Ainda que o modelo pareça representar bem a dinâmica do mercado, há questões quase que naturais que se colocam ao analisarmos mercados diferentes como, por exemplo, o de sal e o de cerveja:

- Qual deles é mais vantajoso?
- As respostas dos consumidores serão as mesmas às alterações de preço impostas pelo produtor, ou melhor, terão o mesmo impacto no consumo, ou ainda, o consumo será afetado na mesma intensidade?

Mas não precisamos nos desfazer dele por esse motivo. Ainda poderemos tirar mais proveito do modelo, sim, ao refinarmos nossa análise com a criação de um coeficiente que relaciona o consumo com a variação de preço.

Elasticidade Preço-Demanda

Como dissemos, queremos analisar o impacto da variação de preço imposta pelo produtor no consumo, ou seja, a variação de consumo Δq em relação à variação de preço Δp . Mas a razão $\Delta q/\Delta p$ encerra uma comparação que trás consigo a dimensão '*quantidade por preço*', o que poderá obscurecer, por assim dizer, a comparação entre mercados diversos, por exemplo, numa comparação entre mercados de soja (tonelada por dólar) e de leite (volume por real). No entanto, podemos melhorar isso acompanhando uma solução cara aos economistas que é a *variação marginal* de uma variável em comparação com a variação de uma unidade da variável da qual a primeira depende. Nesses termos, e no nosso estudo, observa-se o que ocorre com a quantidade consumida em um determinado mer-



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

cado ao variar o preço em uma unidade. O valor assim encontrado é chamado de *consumo marginal*. Porém, isso não reduz a obscuridade na comparação entre mercados, não conseguimos um valor que dê possibilidades de dizer que o consumo em um dos mercados reage mais ou menos intensamente do que no outro. Por esse motivo, um refinamento mais técnico, ou melhor, mais matemático poderá ser útil: a comparação entre a variação percentual da quantidade e a variação percentual do preço,

$$\frac{\Delta q/q}{\Delta p/p},$$

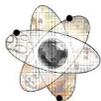
o que nos dará sempre um valor numérico adimensional e já relativizado para melhor comparação entre mercados. Tal refinamento poderá ser levado ainda mais ao extremo tomando-se o limite dessa expressão quando a variação de preço se aproxima de zero; temos, assim, a formalização do conceito de elasticidade preço-demanda:

$$\eta(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \frac{p}{q} \cdot \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}.$$

Se tudo isso foi feito com base na ação do produtor, o que se conhece é a função de oferta descrita no modelo matemático como $p = o(q)$. Agora, como essa função é monótona e decrescente, então ela possui inversa $q = o^{-1}(p)$ como já visto anteriormente. Além disso, ela é não somente decrescente, mas também suave tanto quanto sua inversa, e, portanto, $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dq}} < 0$ (TÁBOAS, 2008, p. 106-7). Consequentemente, $\eta(p) < 0$.

A partir dessa constatação, os mercados são classificados em três categorias:

- 1ª) Inelástico: $-1 < \eta(p) < 0$;
- 2ª) Unitário: $\eta(p) = -1$;
- 3ª) Elástico: $\eta(p) < -1$.

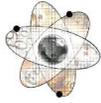


A elasticidade preço-demanda $\eta(p)$ representa a tendência de variação percentual do consumo no instante em que o preço oferecido é pressionado. Nos mercados elásticos, a alteração de, digamos, 3% nos preços praticados, altera o consumo em mais do que 3% no sentido contrário. Ou seja, aumento de 3% no preço gerará uma perda maior do que 3% no consumo do produto; diminuição de 3% no preço gerará aumento maior do que 3% no consumo do produto. Pelo menos é a tendência nos primeiros instantes após a alteração do preço. Nos mercados inelásticos, a análise se dá assim: aumento de 3% no preço gerará uma perda menor do que 3% no consumo do produto; diminuição de 3% no preço gerará aumento menor do que 3% no consumo do produto.

Essa tendência indicada pela elasticidade preço-demanda é importante na hora de escolher uma estratégia de melhor posicionamento da empresa no mercado ou mesmo de escolher o mercado para atuar. Mas, dado que o comportamento do consumidor depende de suas necessidades e desejos que não são necessariamente duradouros, é bom estarmos atentos para as possibilidades de um mercado elástico numa faixa de preço em dado tempo tornar-se inelástico, ou mesmo elástico noutra faixa de preço, em outra época. Tudo dependerá dos dados aferidos diretamente do mercado, o que certamente refletirá o seu contexto atual. Portanto, mesmo que o *modelo matemático* seja bom, ele deverá ser reavaliado periodicamente com novas entradas de dados para o cálculo de soluções a partir do novo *problema matemático*. Isso manterá por algum tempo a validação do seu efeito preditivo.

Receita e elasticidade preço-demanda: uma conclusão

Atentemos, agora, para o conceito de receita total de um mercado em monopólio: $R(q) = p \cdot q$, em que p é o preço unitário praticado e q é a quantidade consumida a esse preço. Usando novamente o conceito de variação marginal no *limite*, teremos, pela regra do produto (TÁBOAS, 2008, p. 97-8), a *receita marginal*:



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

$$R'(q) = \frac{dR}{dq} = p \cdot \frac{dq}{dq} + q \cdot \frac{dp}{dq} = p + p \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} = p \cdot \left(1 + \frac{1}{\eta(p)}\right).$$

De acordo com as classificações de mercado dadas acima, concluímos que:

- 1º) Mercado inelástico: $-1 < \eta(p) < 0 \Rightarrow R'(q) < 0$;
- 2º) Mercado unitário: $\eta(p) = -1 \Rightarrow R'(q) = 0$;
- 3º) Mercado elástico: $\eta(p) < -1 \Rightarrow R'(q) > 0$.

A receita marginal indica, assim, a tendência de crescimento da arrecadação. Em mercados inelásticos, a pressão sobre o preço oferecido leva à queda da arrecadação nos instantes imediatos aos da alteração de preços; em mercados elásticos ocorre o contrário, ou seja, há um aumento, pelo menos momentâneo, da arrecadação.

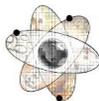
Por fim, resta dizer que, embora o modelo estudado refira-se a mercado em monopólio, pudemos observar a complexidade em construí-lo e ter uma idéia de quão importante esse investimento em modelagem pode beneficiar com qualidade o planejamento e o gerenciamento das atividades econômicas de uma empresa, permitindo eficácia na adoção de estratégias que a coloque em evidência no seu mercado de atuação.

Referências

ARON, Raymond. **As etapas do pensamento sociológico**. 7. ed. Tradução de Sérgio Bath. São Paulo: Martins Fontes, 2008. (Coleção Tópicos).

BASSANEZI, Rodney Carlos & FERREIRA JR., Wilson Castro. **Equações Diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

BUCCHOLZ, Todd G. **Novas idéias de economistas mortos**. Tradução de Luiz Guilherme Chaves e Regina Bhering. Rio de Janeiro: Record, 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Transdisciplinaridade**. 2. ed. São Paulo: Palas Athena, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: Elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

DORN, William S. & MCCRACKEN, Daniel D. **Cálculo Numérico com estudos de casos em FORTRAN IV**. Tradução de José Abel Royo dos Santos e Ana Lucia Serio de Almeida. São Paulo: EDUSP, 1981.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. Os índios Waimiri-Atroari e a etnomatemática. In: KNIJNIK, Gelsa; WANDERER, Fernanda; OLIVEIRA, Cláudio José de (org.) **Etnomatemática, currículo e formação de professores**. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2006.

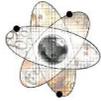
FONTANA, Josep. **História**: análise do passado e projeto social. Tradução de Luiz Roncari. Bauru: EDUSC, 1998.

FONTANA, Josep. **Introdução ao estudo da História Geral**. Tradução de Heloísa Reichel. Bauru: EDUSC, 2000.

HOBSBAWM, Eric J. **A Era das revoluções**: Europa 1789-1848. Tradução de Maria Tereza Lopes Teixeira e Marcos Penchel. 10. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997. (Pensamento Crítico, v.13).

MCLONE, R. R. Can Mathematical Modelling be Taught? In: **Teaching and applying mathematical modelling**. New York: Berry, JS Edts., 1984. p. 476-483.

MERLEAU-PONTY, Maurice. **Fenomenologia da percepção**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006. (Coleção Tópicos).



Elasticidade preço-demanda: construção de um modelo matemático em um contexto histórico como exemplo para ação educacional

MIGUEL, Antonio & MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: Propostas e Desafios**. 1. ed., 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 10).

SINGER, Paul. **Aprender economia**. 17. ed. São Paulo: Contexto, 1998.

SMITH, Adam. **Uma investigação sobre a natureza e causas da riqueza das nações**. Tradução de Norberto de Paula Lima (com base na edição de 1789). Curitiba: Hemus, 2001.

TÁBOAS, Plácido Zoega. **Cálculo em uma variável real**. São Paulo: EDUSP, 2008. (Acadêmica; 70).

TÁBOAS, Plínio Zornoff. Elasticidade Preço-Demanda: Modelagem Matemática e Monitoramento de Mercados. In: GIOVANI, Sueli de Sá & CIACO NETO, João Batista (org.) **Primeiros Passos FAE**: uma compilação das dissertativas elaboradas no Concurso Público da FAE no ano de 2002. Itu: Ottoni Editora, 2003. p. 104-110.