Matemática & Ciência

Relato de Experiência

O ESTUDO DE PRODUTOS NOTÁVEIS ATRAVÉS DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

THE STUDY OF NOTABLE PRODUCTS
THROUGH MATHEMATICAL INVESTIGATION

Fabrycia Maria Teodoro Santos[1]

Arthur Zallio Alves Pereira[2]

Adriana Oliveira Almeida[3]

Resumo

Este artigo se propõe a abordar como o ensino de álgebra tem sido proposto pelos autores nas séries finais do Ensino Fundamental, na perspectiva da investigação Matemática, ou seja, deixando de lado a reprodução mecânica e tradicional de algoritmos. Acreditando em uma abordagem diferenciada dentro do ensino da Matemática, uma atividade investigativa referente ao caso “Quadrado da soma de dois termos” de produtos notáveis foi aplicada a alunos que concluíram o 7º ano do Ensino Fundamental em 2017. Constatou-se que, mesmo sem conhecimentos de álgebra, os alunos conseguiram, por meio da observação, chegar ao algoritmo de uma forma mais significativa, sem recorrer a fórmulas prontas e memorizadas.

Palavras-chave: Ensino de Álgebra. Investigação Matemática. Produtos Notáveis.

Abstract

This paper proposes to describe how the teaching of algebra has been proposed in the final grades of middle school, in the perspective of mathematical investigation, that is, leaving aside the mechanical and traditional reproduction of algorithms. Believing in a differentiated approach within the teaching of Mathematics, an investigative activity related to the case "Square of the Sum" of notable products had been applied to students who completed the seventh grade in 2017. In the research was observed that, even without knowledge of algebra, students succeeded, through observation, to arrive at the algorithm in a more meaningful way, without resorting to ready and memorized formulas.

Key words: Algebra teaching. Mathematical Investigation. Notable products.

[1] Mestre em Ensino de Matemática pela PUC Minas. E-mail: fabrycia@gmail.com
[2] Docente da Fundação Torino. E-mail: azallio@gmail.com
[3] Docente da Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros. Mestre em Ensino de Matemática pela PUC Minas. E-mail: drykalmeida@yahoo.com.br

Introdução

A Matemática é uma ciência formada pela tríade aritmética, álgebra e geometria, as quais se encontram interligadas pelo Cálculo. Cada "elo" dessa tríade tem sua importância na construção do conhecimento matemático. Assim, a comunidade acadêmica, juntamente com professores e alunos, deve buscar sempre novas metodologias e ferramentas que contribuam para a construção de um conhecimento mais significativo.

Este artigo tem como matéria de estudo o ensino da álgebra, o qual, de acordo com os *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática* (BRASIL, 1998), é visto como "dificultoso", tanto por alunos, quanto por professores. Os professores, em sua maioria, acabam reduzindo o estudo à teoria e a atividades propostas pelos livros didáticos, o que, muitas vezes, torna o aprendizado maçante para o aluno. O aluno, por sua vez, não tem uma visão clara sobre a importância da álgebra, o que acaba por comprometer a qualidade e o desenvolvimento de seu estudo.

Nesse contexto, este artigo busca investigar como o conteúdo de álgebra tem sido abordado pelos autores nas séries finais do Ensino Fundamental. Partindo de uma análise do conteúdo de produtos notáveis em livros didáticos, buscar-se-á, na investigação matemática, uma abordagem metodológica que seja capaz de motivar os alunos a descobrirem as regras, ao invés de permanecerem no método tradicional, reproduzindo mecanicamente algoritmos "prontos". Para tanto, optou-se por uma pesquisa, do tipo estudo de caso, com análise qualitativa, a qual se deu por meio de uma atividade investigativa, referente ao caso de produtos notáveis conhecidos como "*Quadrado da soma de dois termos*" a alunos do Ensino Fundamental.

A atividade investigativa foi estruturada com base nas diretrizes propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) acerca da investigação matemática. Foram selecionados seis alunos que, em 2018, concluíram o 7º ano. O propósito da investigação foi avaliar se alunos que ainda não tiveram contato com tópicos específicos de álgebra seriam capazes de chegar ao algoritmo por meio de suas próprias observações e conjecturas. A pesquisa se deu em janeiro de 2019, com alunos de escolas privadas, da cidade de Divinópolis, Minas Gerais.

O estudo da álgebra

Muitos são os autores que questionam o fato de a álgebra ser iniciada num momento posterior, após maior domínio da aritmética. "Essa crença, por vezes, apoia-se na ideia de que ela requer 'pensamento operatório formal', por outras, apoia-se na ideia de que é preciso primeiro aprender aritmética [...]" (LINS; GIMENES, 2006, p. 112-113). Será que, realmente, esses conteúdos devem ser ensinados de forma isolada? Não seriam campos complementares da Matemática, os quais juntos produziriam maior significado para os estudantes? Mas em que momento se dá a fragmentação dessas vertentes? O que seria, de fato, álgebra?

De acordo com Lins e Gimenez (2006), não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente. Há consenso apenas sobre os tópicos que estão a ela associados, ou seja, pontos que são abordados pela álgebra, tais como: equações, cálculo literal, funções, o que torna, assim, dificultoso o processo de se organizar um currículo para a educação algébrica. Nesse contexto, vê-se um "despreparo" de muitos professores que, talvez, por não conhecerem alternativas, pautam suas aulas replicando somente o que os livros didáticos oferecem.

> Alguém que acredite que a atividade algébrica se resume a um "cálculo com letras", pode propor o que para a sala de aula? Talvez adote, seguindo algumas péssimas ideias encontradas em propostas para a educação aritmética, a prática de utilizar a "sequência" técnica (algoritmo)/prática (exercícios). Com toda a franqueza, isso é praticamente tudo que encontramos na quase total maioria dos livros didáticos disponíveis no mercado brasileiro, e essa é uma situação bastante ruim. O que é, talvez, até pior é que essa prática não se baseia em investigação ou reflexão de qualquer natureza ou profundidade, apenas em

> uma tradição, tradição essa que estudos e projetos de todos os tipos, e por todo o mundo – inclusive no Brasil – já mostraram ser ineficaz e mesmo perniciosa à aprendizagem. (LINS; GIMENEZ, 2006, p. 105-106).

De acordo com Lins e Gimenez (2006), os livros encontram-se revestidos de autoridade, o que corrobora com o fato de que a maioria dos professores limita a atividade algébrica ao cálculo literal, visto somente na perspectiva dos algoritmos. Segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*, tal estratégia tem se mostrado de pouco eficácia, conforme comprovam as pesquisas: "[...] a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações [...]" (BRASIL, 1998, p. 115).

O estudo e o ensino da álgebra precisam estar além da reprodução mecânica dos algoritmos, conforme salientam os *PCN de Matemática* (BRASIL, 1998). Coxford e Shulte (1995) também compartilham desse pensamento, quando dizem que o estudo da álgebra deve ir além da manipulação de símbolos. Assim, é preciso construir um aprendizado significativo, e isso só se consegue, segundo Lins e Gimenez (2006), quando o estudo se dedica a investigar os significados que são produzidos no interior das atividades.

Não há dúvida de que a prática de atividades é de suma importância para o aprendizado e desenvolvimento de um estudante não só em Matemática como em todas as ciências. Todavia, essa prática precisa ter significado e não se reduzir a uma mera atividade de repetição, o famoso "decoreba". "O estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização [...]" (BRASIL, 1998, p. 115). Lins e Gimenez (2006) salientam que os exercícios só podem ser eficazes caso os alunos compreendam a natureza do que estão fazendo. Assim, é essencial que o aluno se envolva e trabalhe junto com o professor na construção do seu aprendizado e/ou conhecimento. "A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas [...]" (LINS; GIMENEZ, 2006, p. 137). "Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto" (LINS; GIMENEZ, 2006, p. 145-146).

A maioria dos colégios utiliza como referência o livro didático e/ou apostilas elaboradas com base em uma série de livros. Alguns professores desenvolvem atividades diferentes usando outros instrumentos, como material concreto e tecnologia – da mais simples, como a calculadora, até as mais sofisticadas, como softwares e aplicativos. Independentemente do recurso didático a ser utilizado, o importante é que os educadores busquem interligá-los a situações que levem ao exercício da análise e reflexão, tornando, assim, o estudo cada vez mais significativo.

Produtos notáveis em livros didáticos: uma análise do caso "Quadrado da Soma de Dois Termos"

A álgebra, normalmente, começa a ser estudada no 7º ano do Ensino Fundamental, com os tópicos de equações, inequações e sistemas. Posteriormente, o estudo se torna mais específico, com os capítulos de cálculo algébrico, no 8º ano, e de funções, no 9º ano. Todavia, de acordo com Coxford e Shulte (1995), nota-se uma dificuldade com o ensino da álgebra, pois muitos alunos não compreendem o foco da atividade algébrica e a natureza de suas respostas.

> Em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, porém, é diferente. Na álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral. Uma razão para se estabelecerem essas afirmações gerais é usá-las como "regras de procedimento" para a resolução de problemas adequados e, então, achar respostas numéricas, mas o foco imediato é o estabelecimento, a expressão e a manipulação da própria afirmação geral. Muitos alunos não percebem isso e continuam achando que devem dar uma resposta numérica. (COXFORD; SHULTE, 1995, p. 24).

Diante dessa situação, é comum professores ditos "tradicionalistas" estenderem o estudo da álgebra por meio da prática exaustiva de exercícios, normalmente orientados pelo livro didático. Porém, conforme destacam os *PCN de Matemática* (BRASIL, 1998), essa não é uma medida eficaz em termos de construção do aprendizado e motivação dos alunos. "Essa solução, além de ser ineficiente, provoca grave prejuízo no trabalho com outros temas da Matemática, também fundamentais, como os conteúdos referentes à Geometria" (BRASIL, 1998, p. 116).

Além disso, muitos livros trazem uma exploração limitada dos conteúdos, ou seja, os autores, em sua maioria, trabalham dentro de uma única linha de raciocínio. Comumente trabalhado no 8º ano do EF, o conteúdo dos produtos notáveis aparece de forma sucinta nos livros didáticos, dentro da unidade de cálculo algébrico.

Esta seção apresenta a análise do caso "Quadrado da Soma de Dois Termos" de produtos notáveis em três livros didáticos, de autores e anos diferentes, os quais aparecem ilustrados abaixo. O objetivo dessa análise é avaliar de que modo os autores apresentam o conteúdo de produtos notáveis, bem como apresentar as semelhanças e as diferenças em relação à exposição teórica e proposição de exercícios sobre o tema em estudo.

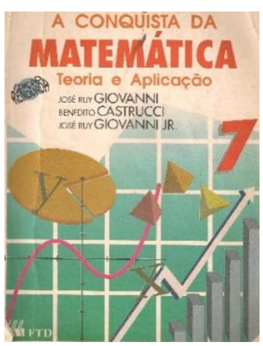


Figura 1 – Livro 1[4]

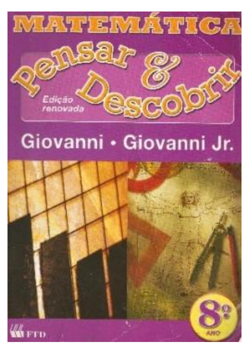


Figura 2 – Livro 2[5]

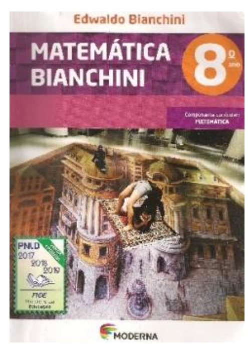


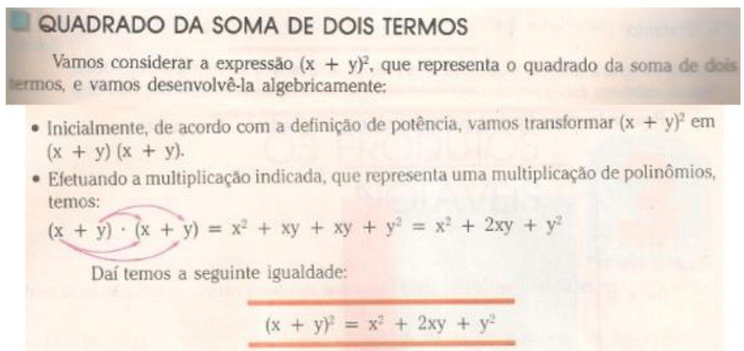
Figura 3 – Livro 3[6]

Fonte: Detalhada nas notas de rodapé, conforme especificado nas figuras.

[4] GIOVANNI; CASTRUCCI; GIOVANNI JR., 1992.
[5] GIOVANNI; GIOVANNI JR., 2010.
[6] BIANCHINI, 2015.

O livro *A conquista da Matemática*, de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, de 1992, utiliza nove páginas para trabalhar o conteúdo completo de produtos notáveis. Os autores iniciam o tópico dizendo que se tratam de produtos muito utilizados no cálculo algébrico e que, por essa razão, foram chamados de produtos notáveis. Cada um dos casos é apresentado de acordo com a seguinte estrutura:

- desenvolvimento do produto por meio da propriedade distributiva:



QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Vamos considerar a expressão $(x + y)^2$, que representa o quadrado da soma de dois termos, e vamos desenvolvê-la algebricamente:

- Inicialmente, de acordo com a definição de potência, vamos transformar $(x + y)^2$ em $(x + y)(x + y)$.
- Efetuando a multiplicação indicada, que representa uma multiplicação de polinômios, temos:

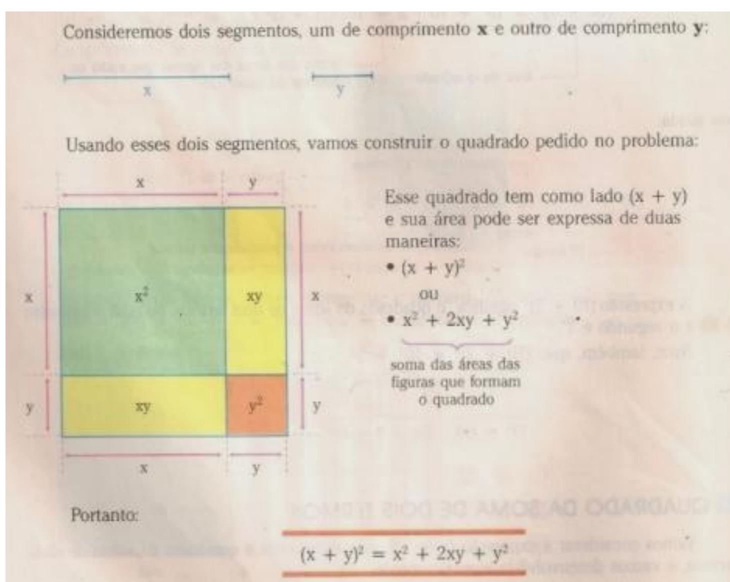
$$(x + y) \cdot (x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Daí temos a seguinte igualdade:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Figura 4 – Exposição teórica – Livro 1
Fonte: Giovanni; Castrucci; Giovanni Jr (1992, p. 65-66).

- abordagem geométrica do produto notável:



Consideremos dois segmentos, um de comprimento **x** e outro de comprimento **y**:

Usando esses dois segmentos, vamos construir o quadrado pedido no problema:

Esse quadrado tem como lado $(x + y)$ e sua área pode ser expressa de duas maneiras:

- $(x + y)^2$

ou

- $\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{\text{soma das áreas das figuras que formam o quadrado}}$

Portanto:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Figura 5 – Exposição teórica – Livro 1
Fonte: Giovanni; Castrucci; Giovanni Jr (1992, p.66).

- definição algébrica e conceitual do caso:

Tanto algebricamente como geometricamente podemos escrever:

$$\underbrace{(x + y)^2}_{\text{quadrado da soma de 2 termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{quadrado do 1º}} + \underbrace{2xy}_{\text{duas vezes o produto do 1º pelo 2º}} + \underbrace{y^2}_{\text{quadrado do 2º}}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Figura 6 – Exposição teórica – Livro 1
Fonte: Giovanni; Castrucci; Giovanni Jr (1992, p. 67).

- exemplos de aplicação direta:

Observe os seguintes exemplos, onde vamos aplicar a regra que acabamos de apresentar:

1) $(x + 2)^2 = (x)^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + (2)^2 = x^2 + 4x + 4$

2) $(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

3) $(a^3 + 5b)^2 = (a^3)^2 + 2 \cdot a^3 \cdot 5b + (5b)^2 = a^6 + 10a^3b + 25b^2$

Figura 7 – Exposição teórica – Livro 1
Fonte: Giovanni; Castrucci; Giovanni Jr (1992, p. 67).

Após a apresentação de todos os casos, os autores apresentam uma lista com exercícios para fixação. A maioria das atividades dos livros didáticos apresenta e enfatiza apenas a aplicação direta de regras. Embora esse trabalho seja importante, acredita-se que a investigação matemática pode tornar o estudo dos produtos notáveis mais significativo para os alunos, envolvendo menor memorização de regras.

2. Utilizando as regras dos produtos notáveis, calcule:
a) $(7a + 1)(7a - 1)$
b) $(2 + 9x)^2$
c) $(6x - y)^2$
d) $\left(3x + \frac{2}{3}a\right)^2$
e) $(a^4 + m^4)(a^4 - m^4)$

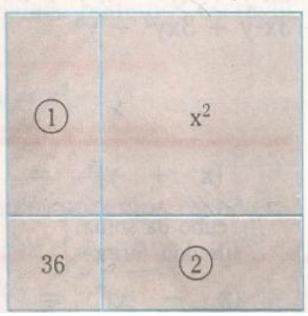
4. Escreva o polinômio que elevado ao quadrado dá:
a) $a^2 + 6a + 9$
b) $y^2 - y + \frac{1}{4}$

5. Qual é o polinômio que representa o produto de $2a^2 + \frac{1}{3}b$ por $2a^2 - \frac{1}{3}b$? Determine seu valor numérico para $a = -2$ e $b = -9$.

Figura 8 – Exercícios – Livro 1
Fonte: Giovanni; Castrucci; Giovanni Jr (1992, p. 71).

Os poucos exercícios que fogem da resolução mecânica acabam por solicitar que o aluno reproduza algo que lhe fora apresentado na explanação teórica do caso em estudo, como mostra o exercício de número 22, o qual ilustra a abordagem geométrica de maneira bastante similar ao conteúdo exposto, ou seja, com “limitado” raciocínio.

22. Observando a figura seguinte, notamos que a área de um quadrado é x^2 e a área do outro quadrado é 36. Nessas condições, responda:



a) Qual é a área do retângulo 1 ?
b) Qual é a área do retângulo 2 ?
c) Qual é a área total da figura?

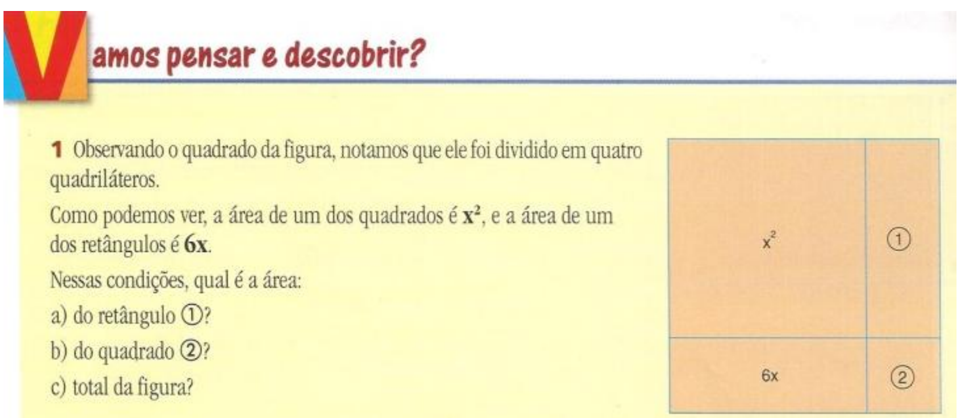
Figura 9 – Exercícios – Livro 1
Fonte: Giovanni; Castrucci; Giovanni Jr (1992, p. 72).

Conforme pontuado pelos *PCN de Matemática* (BRASIL, 1998), essa abordagem pouco contribui para o desenvolvimento do aluno, o qual acaba passando pelo conteúdo sem compreendê-lo.

> É mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL, 1998, p. 116).

O livro *Matemática: pensar & descobrir*, dos autores Giovanni e Giovanni Jr., de 2010, também utiliza nove páginas para trabalhar o conteúdo de produtos notáveis. Apesar de 18 anos mais novo, os casos de produtos notáveis são apresentados ao leitor com estrutura similar ao do livro *A conquista da Matemática*, de 1992, que também é assinado pelos autores.

O conteúdo, novamente, se encerra com uma seção de exercícios, cuja estrutura segue os mesmos parâmetros do livro anterior. Há uma novidade, que é a apresentação de um bloco extra de exercícios, intitulado "Vamos pensar e descobrir?". Apesar de o título sugerir uma abordagem nova e diferenciada, no sentido de que o aluno seria estimulado a analisar de maneira mais profunda as questões, o enfoque ainda se limita à execução algébrica da regra. O raciocínio analítico envolvido nas questões é ainda muito simplório.



Vamos pensar e descobrir?

1 Observando o quadrado da figura, notamos que ele foi dividido em quatro quadriláteros.

Como podemos ver, a área de um dos quadrados é $\mathbf{x^2}$, e a área de um dos retângulos é **6x**.

Nessas condições, qual é a área:

a) do retângulo ①?

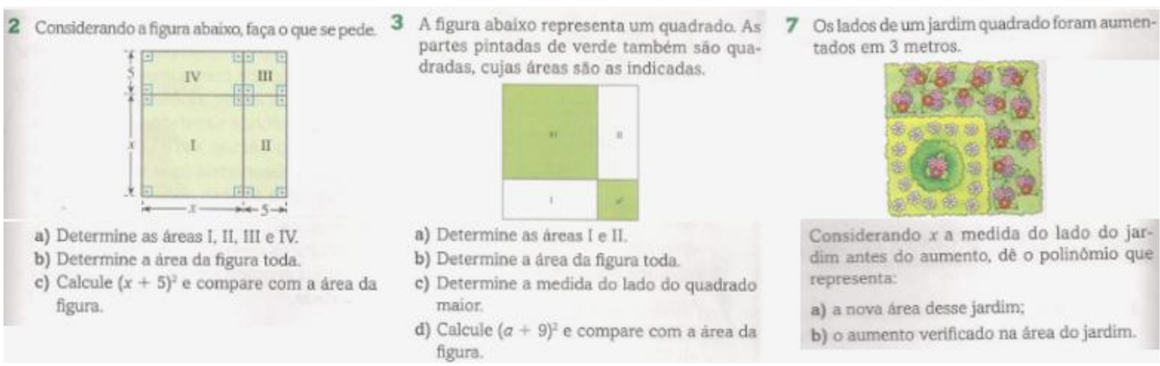
b) do quadrado ②?

c) total da figura?

Figura 10 – Exercícios – Livro 2
Fonte: Giovanni; Giovanni Jr. (2010, p. 195).

O livro *Matemática Bianchini*, do autor Edwaldo Bianchini, de 2015, apresenta um corpo teórico um pouco mais aprofundado em relação aos livros anteriormente analisados, no que diz respeito à representação geométrica do conteúdo. Todavia, apesar do maior detalhamento na explicação dos casos, a estrutura com que a teoria é apresentada pouco se difere dos demais livros.

A seção de exercícios se apresenta de forma diferente nesse livro, isto é, em blocos segmentados. Após cada caso, o autor propõe um bloco de exercícios, diferentemente dos outros livros, em que os exercícios vinham ao final, de forma conjunta, ou seja, após a exposição teórica de todos os casos estudados. Percebe-se, também, uma mudança na composição dos exercícios. Bianchini (2015) tira um pouco o foco da aplicação algébrica direta do conteúdo e propõe que o aluno faça uma reflexão sobre o que está fazendo. Percebe-se uma exploração maior da abordagem geométrica por parte desse autor, conforme evidenciado nas questões 2, 3 e 7, abaixo ilustradas.



2 Considerando a figura abaixo, faça o que se pede.

a) Determine as áreas I, II, III e IV.
b) Determine a área da figura toda.
c) Calcule $(x + 5)^2$ e compare com a área da figura.

3 A figura abaixo representa um quadrado. As partes pintadas de verde também são quadradas, cujas áreas são as indicadas.

a) Determine as áreas I e II.
b) Determine a área da figura toda.
c) Determine a medida do lado do quadrado maior.
d) Calcule $(a + 9)^2$ e compare com a área da figura.

7 Os lados de um jardim quadrado foram aumentados em 3 metros.

Considerando x a medida do lado do jardim antes do aumento, dê o polinômio que representa:

a) a nova área desse jardim;
b) o aumento verificado na área do jardim.

Figura 11 – Exercícios – Livro 3
Fonte: Bianchini (2015, p. 115-116).

Um outro diferencial encontrado em *Matemática Bianchini* está em um espaço reservado para uma abordagem histórica do conteúdo de produtos notáveis. Somente esse autor preocupou-se em ressaltar essa importante contextualização.

Investigação matemática

Coxford e Shulte (1995) salientam que o cenário atual obriga-nos a reexaminar o currículo de Matemática e a maneira como esta é ensinada, visto que, de acordo com os *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática* (BRASIL, 1998), um dos objetivos do ensino quanto ao pensamento algébrico é que os alunos sejam capazes de interpretar informações. Nesse sentido, a comunidade acadêmica deve, constantemente, buscar ferramentas e estratégias que visem tornar o estudo mais significativo e prazeroso para o aluno.

A investigação matemática é uma abordagem que trabalha com questões abertas, as quais oferecem múltiplas possibilidades. “O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23). Assim, o aluno se torna agente do seu aprendizado, participando não só na formulação e resolução de questões, “mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática; • Explorar a situação problemática; • Formular questões.
Conjecturas	• Organizar dados; • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura);
Testes e reformulação	• Realizar testes; • Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura; • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte; Brocardo; Oliveira (2009, p. 21).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) pontuam que a investigação desenvolve-se em torno de um ou mais problemas. Para os autores, o estudo desses problemas vai muito além de encontrar a resposta correta. Por meio da investigação matemática, eles destacam que o processo de resolução de problemas pode levar a descobertas que, em alguns casos, se revelem mais importantes que a própria solução. “Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática [...]” (PONTE; BROCARDO;

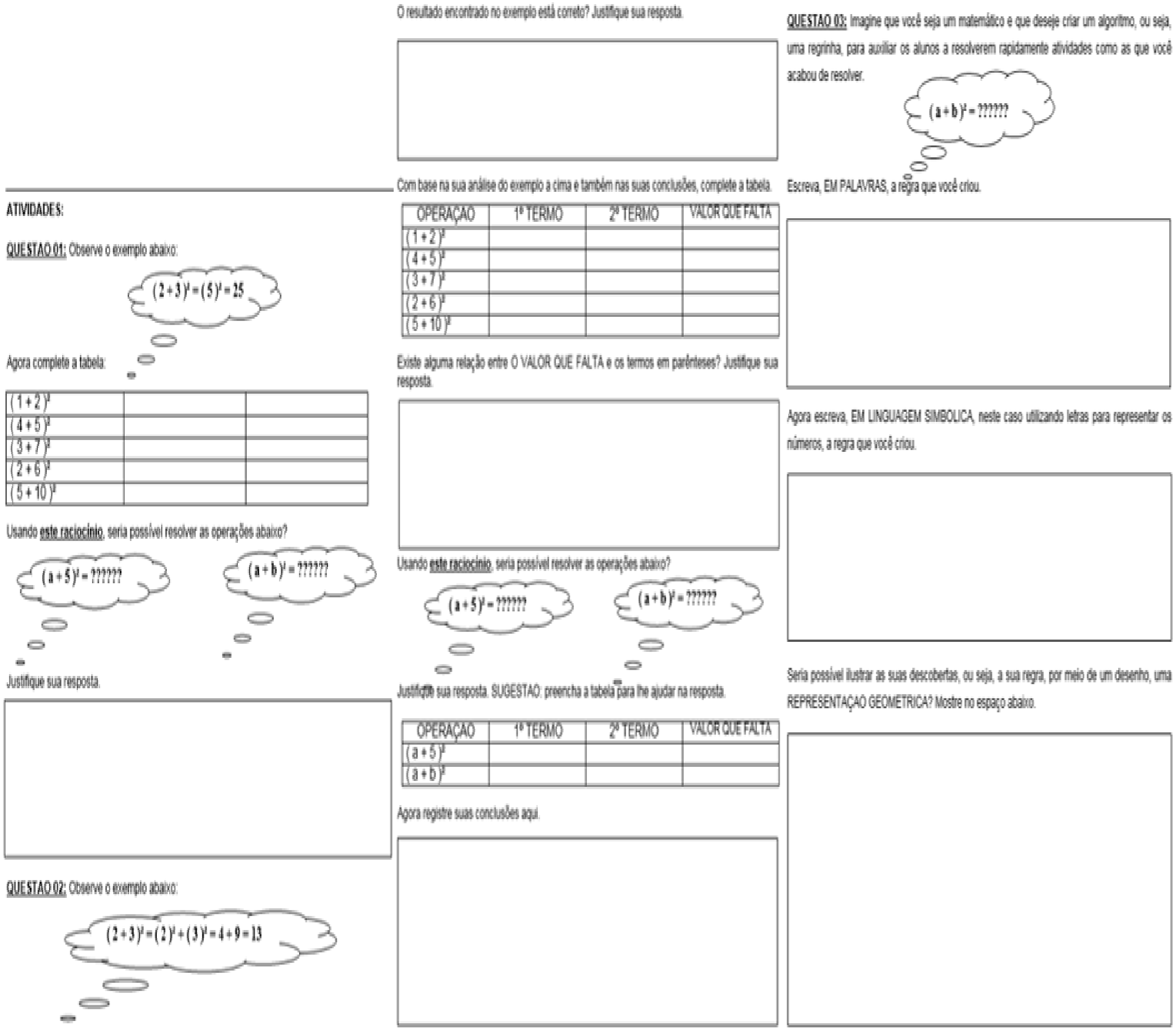
OLIVEIRA, 2009, p.19). O processo investigativo deve ser conduzido conforme as diretrizes destacadas no Quadro 1.

Aspectos metodológicos

A pesquisa aqui apresentada é de cunho qualitativo, conforme explicam Bogdan e Biklen citados por Ludke e André (2017) e foi desenvolvida em janeiro de 2019, na cidade de Divinópolis, Minas Gerais.

> A pesquisa qualitativa ou naturalística [...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. (BOGDAN; BIKLEN, 1982 *apud* LUDKE; ANDRÉ, 2017, p. 14).

A pesquisa foi aplicada a seis alunos de escolas particulares que, no ano de 2018, concluíram o 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental. Como no mês de janeiro os participantes estavam de férias escolares, a atividade foi aplicada em uma sala sublocada pelos autores. Antes de iniciar a atividade, conforme recomendado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), os autores explicaram aos alunos todas as atividades e se mantiveram próximos, para dar apoio a quaisquer dúvidas que viessem a ocorrer.



ATIVIDADES:

QUESTAO 01: Observe o exemplo abaixo:

$(2+3)^2 = (5)^2 = 25$

Agora complete a tabela:

$(1+2)^2$		
$(4+5)^2$		
$(3+7)^2$		
$(2+6)^2$		
$(5+10)^2$		

Usando este raciocínio, seria possível resolver as operações abaixo?

$(a+5)^2 = ??????$

$(a+b)^2 = ??????$

Justifique sua resposta.

QUESTAO 02: Observe o exemplo abaixo:

$(2+3)^2 = (2)^2 + (3)^2 = 4 + 9 = 13$

O resultado encontrado no exemplo está correto? Justifique sua resposta.

Com base na sua análise do exemplo a cima e também nas suas conclusões, complete a tabela.

OPERAÇAO	1º TERMO	2º TERMO	VALOR QUE FALTA
$(1+2)^2$			
$(4+5)^2$			
$(3+7)^2$			
$(2+6)^2$			
$(5+10)^2$			

Existe alguma relação entre O VALOR QUE FALTA e os termos em parênteses? Justifique sua resposta.

Usando este raciocínio, seria possível resolver as operações abaixo?

$(a+5)^2 = ??????$

$(a+b)^2 = ??????$

Justifique sua resposta. SUGESTAO: preencha a tabela para lhe ajudar na resposta.

OPERAÇAO	1º TERMO	2º TERMO	VALOR QUE FALTA
$(a+5)^2$			
$(a+b)^2$			

Agora registre suas conclusões aqui.

QUESTAO 03: Imagine que você seja um matemático e que deseje criar um algoritmo, ou seja, uma regrinha, para auxiliar os alunos a resolverem rapidamente atividades como as que você acabou de resolver.

$(a+b)^2 = ??????$

Escreva, EM PALAVRAS, a regra que você criou.

Agora escreva, EM LINGUAGEM SIMBOLICA, neste caso utilizando letras para representar os números, a regra que você criou.

Seria possível ilustrar as suas descobertas, ou seja, a sua regra, por meio de um desenho, uma REPRESENTAÇAO GEOMETRICA? Mostre no espaço abaixo.

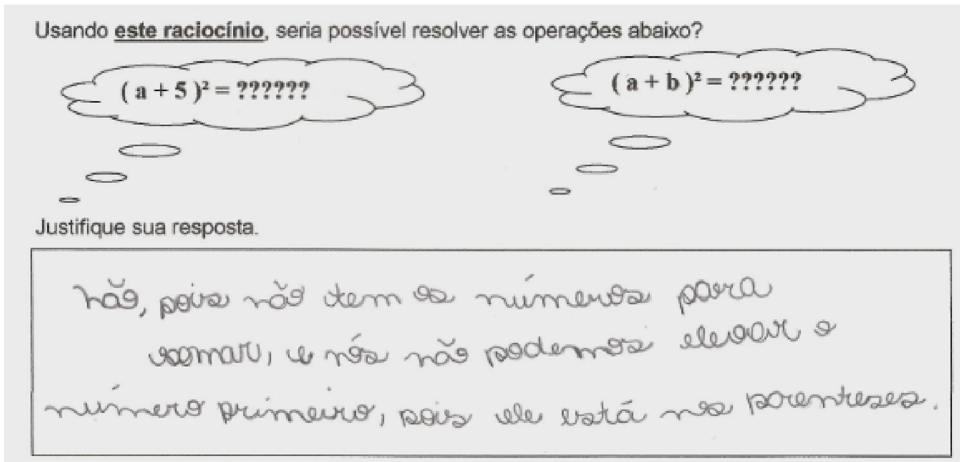
Figura 12 – Atividades propostas
Fonte: Arquivo Pessoal

Tomando como referência os momentos propostos no Quadro 1 por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) para a realização de uma investigação, elaborou-se uma pesquisa, a qual foi estruturada em formato de uma atividade investigativa com foco no caso "*Quadrado da soma de dois termos*" de produtos notáveis. Trata-se de três atividades, organizadas por meio de uma evolução gradativa, com o intuito de permitir ao participante registrar e testar suas conjecturas a cada nova etapa, conforme exposto a seguir.

Descrição e análise dos dados

A atividade foi realizada sem nenhum problema. Em média, foram necessários 50 minutos para a resolução das atividades propostas. Embora tenham sido explicados, detalhadamente, todos os itens das questões, alguns alunos ficaram aflitos em alguns momentos. Era visível a dificuldade de alguns em saber como expressar em palavras aquilo que fora calculado.

A questão 1 foi respondida corretamente por todos os alunos. Inicialmente, apresentou-se um exemplo, seguido de uma tabela a qual deveria ser preenchida seguindo as diretrizes do exemplo. Todas as respostas foram equivalentes. Logo depois da tabela, os estudantes deveriam investigar a possibilidade de resolver duas outras questões, envolvendo letras, seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido anteriormente. Todos os participantes concordaram que não seria possível resolver as questões e atribuíram essa impossibilidade à presença das letras entre os parênteses.



Usando **este raciocínio**, seria possível resolver as operações abaixo?

$(a+5)^2 = ??????$

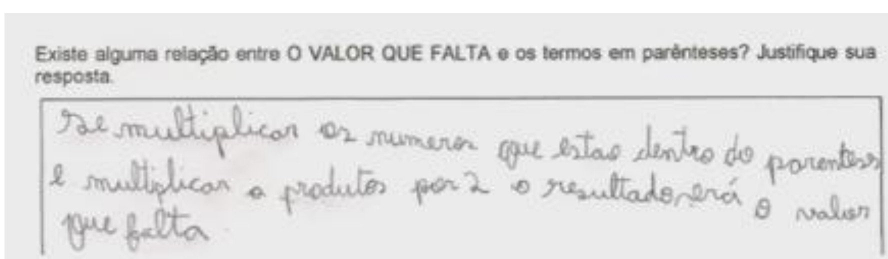
$(a+b)^2 = ??????$

Justifique sua resposta.

Não, pois não tem os números para somar, e nós não podemos elevar o número primeiro, pois ele está no parenteses.

Figura 13 – Resposta do aluno A5 à questão 1
Fonte: Caderno do aluno A5.

A questão 2 apresentou o mesmo exemplo da questão 1, porém, com outra instrução para o processo resolutivo, a qual sugeria a adição de um valor (chamado na atividade de “valor que falta”), para que se chegasse ao resultado correto. Todos os alunos conseguiram descobrir o valor que faltava e conseguiram, também, relacioná-lo aos termos entre parênteses, cada um a sua maneira, conforme solicitado pela questão. Todavia, esta foi a parte mais demorada da atividade para todos os participantes. Alguns ficaram 30 minutos analisando a relação.

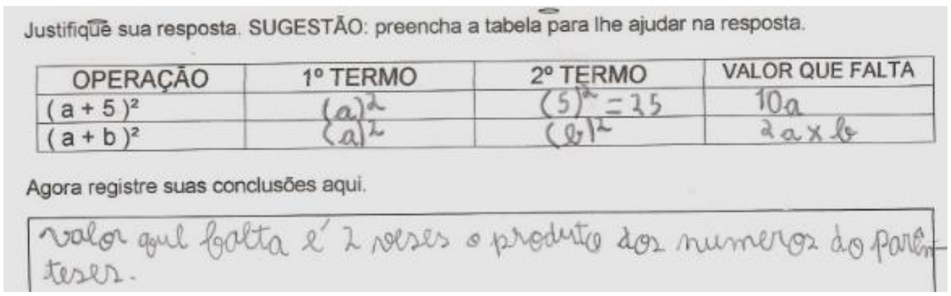


Existe alguma relação entre O VALOR QUE FALTA e os termos em parênteses? Justifique sua resposta.

Se multiplicar os numeros que estão dentro do parenteses e multiplicar o produto por 2 o resultado será o valor que falta

Figura 14 – Resposta do aluno A2 à questão 2
Fonte: Caderno do aluno A2.

Depois de descoberto o valor que faltava, a questão 2 propunha, novamente, a resolução dos balões que não puderam ser respondidos na questão 1. Apesar de todos os alunos terem conseguido completar a tabela de apoio utilizando as descobertas referentes ao valor que faltava, nenhum deles compreendeu que a resolução da operação consistia na soma dos resultados registrados na tabela. Todos acabaram registrando como conclusões a regra encontrada para o valor que faltava. Percebe-se, então, uma falha na atividade, pois essa abordagem não foi exemplificada, conforme os demais aspectos do exercício.



Justifique sua resposta. SUGESTÃO: preencha a tabela para lhe ajudar na resposta.

OPERAÇÃO	1º TERMO	2º TERMO	VALOR QUE FALTA
$(a + 5)^2$	$(a)^2$	$(5)^2 = 25$	$10a$
$(a + b)^2$	$(a)^2$	$(b)^2$	$2a \times b$

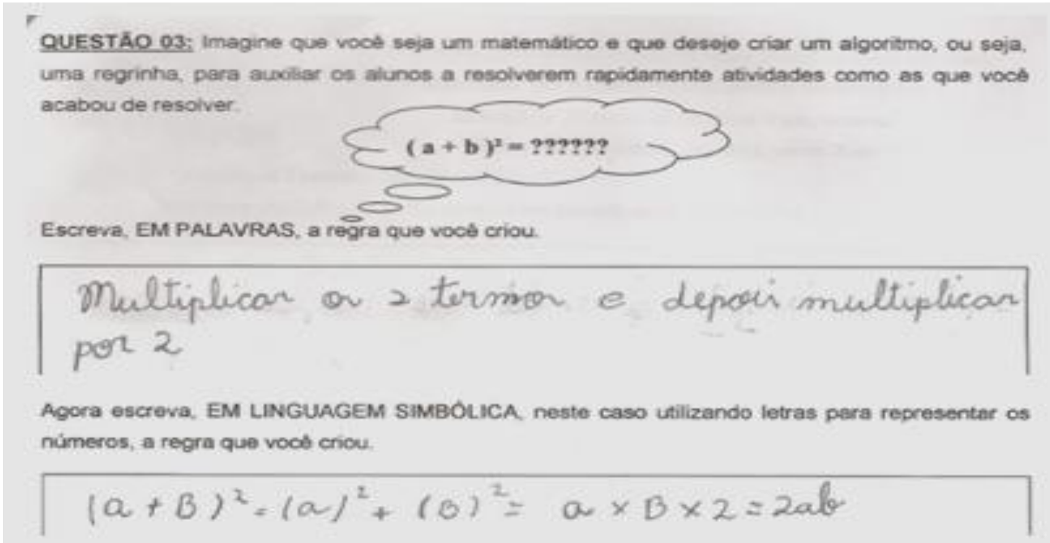
Agora registre suas conclusões aqui.

valor que falta é 2 veses o produto dos numeros do parenteses.

Figura 15 – Resposta do aluno A1 à questão 2
Fonte: Caderno do aluno A1.

A terceira questão propõe um fechamento para o caso “Quadrado da Soma de Dois Termos”. O aluno é convidado a se imaginar como um matemático, o qual irá apresentar sua regra para outros alunos. A apresentação da regra deveria ser apresentada sob três formas: linguagem verbal – apresentação em palavras da regra criada; linguagem simbólica – apresentação do algoritmo que representa a regra; representação geométrica – ilustração da regra com figuras geométricas.

Esta questão mostrou-se bastante difícil para os alunos, e, portanto, foi necessário orientar os alunos novamente sobre o que deveria ser feito. Mesmo com as explicações, a maioria dos alunos ainda se manteve preso à regra criada para “o valor que falta”, a qual foi dada como resposta para a forma linguagem verbal. O mesmo se deu com a apresentação do algoritmo para a linguagem simbólica.


QUESTÃO 03: Imagine que você seja um matemático e que deseje criar um algoritmo, ou seja, uma regrinha, para auxiliar os alunos a resolverem rapidamente atividades como as que você acabou de resolver.

$(a + b)^2 = ??????$

Escreva, EM PALAVRAS, a regra que você criou.

Multiplicar os 2 termos e depois multiplicar por 2

Agora escreva, EM LINGUAGEM SIMBÓLICA, neste caso utilizando letras para representar os números, a regra que você criou.

$(a + B)^2 = (a)^2 + (b)^2 = a \times B \times 2 = 2ab$

Figura 16 – Resposta do aluno A4 à questão 3
Fonte: Caderno do aluno A4.

Com relação à representação geométrica, nenhum aluno encontrou a solução correta. Os alunos demonstraram dificuldade em associar a geometria ao caso de produtos notáveis em estudo e quase todos deixaram a questão em branco. Muitos disseram que o estudo da geometria é superficial e que, normalmente, os professores não conseguem cumprir o programa. Mesmo quando foi solicitado aos alunos que fizessem uma conexão da representação simbólica do caso de produtos notáveis estudado, com as fórmulas de áreas das figuras planas, como, por exemplo, a^2 = área de um quadrado de lado a, eles não conseguiram desenvolver o raciocínio e construir a representação geométrica solicitada.

Percebe-se, pela análise das respostas, uma dificuldade no uso da linguagem verbal e simbólica para expressar os resultados obtidos por meio dos cálculos matemáticos. De acordo com as diretrizes do processo de investigação matemática explicitados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o trabalho com questões dissertativas é de suma importância para a expansão do conhecimento e produção de significados, uma vez que, no momento em que os alunos formulam conjecturas acerca do que está sendo estudado, eles conseguem avaliar melhor o resultado obtido.

Considerações Finais

O ensino da álgebra está muito além da simples prática do cálculo literal. É preciso quebrar os paradigmas que defendem que “a verdade está no livro didático”, exclusivamente, e impedir que o estudo permaneça “engessado” a uma única linha de trabalho. A prática de exercícios tem, sim, seu valor e importância para o aprendizado da Matemática. No entanto, essa não pode se resumir à reprodução mecânica de regras. É fundamental que o aluno compreenda o porquê daquilo que está fazendo.

A atividade investigativa apresentada pela pesquisa, embora tenha registrado uma falha, mostrou que a pesquisa matemática oferece uma possibilidade de estudo diferenciada, uma vez que os alunos, através de observações organizadas, conseguiram elaborar suas conjecturas e chegar ao algoritmo de forma gradativa. Os alunos foram instigados a ir além: usar a aritmética, o raciocínio lógico e, ao final, concluir que suas descobertas podiam ser representadas em uma linguagem simbólica, a qual é chamada de álgebra.

Por outro lado, percebeu-se grande dificuldade dos alunos em trabalharem o raciocínio qualitativo. Todos os alunos demonstraram ser bons executores das propriedades matemáticas e a verbalização daquilo que estava sendo feito mostrou-se genuína. Ficou clara a dificuldade dos alunos em estudar a Matemática de forma aprofundada nas linguagens verbal e geométrica. A resolução operatória tradicional é muito forte.

O estudo da álgebra, além de significativo, tem que ser motivador. Nesse sentido, outras abordagens podem contribuir, no sentido de tornar o estudo mais eficiente e menos dificultoso. Todavia, a mudança e/ou a introdução de novos métodos devem ocorrer de forma gradativa, com estágios intermediários, a fim de que os alunos consigam assimilar todo o conteúdo. É muito importante que o estudante se envolva com o processo de aprendizagem e busque sempre ir além. Para tanto, a comunidade acadêmica – escola, professores e pesquisadores – deve buscar novas metodologias e ferramentas de aprendizagem que, além de conquistar o aluno, irão contribuir para a expansão do conhecimento.

Referências

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática**.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR., J. R. **A conquista da Matemática**: teoria e aplicação. São Paulo: FTD, 1992.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR., J. R. **Matemática**: pensar & descobrir, 8º ano. São Paulo: FTD, 2010.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2017.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.