Matemática & Ciência

DE DIOPHANTO A MORDELL – UM BREVE RELATO SOBRE MAIS UM GRANDE ENIGMA DA TEORIA DOS NÚMEROS

FROM DIOPHANTO TO MORDELL – A BRIEF REPORT ON ANOTHER GREAT RIDDLE IN NUMBERS THEORY

Rubens Vilhena Fonseca[1]

Andreza Thalia Menezes Monteiro[2]

Resumo

O presente artigo se refere à exposição de um relato sem o rigor dos métodos utilizados em temas sobre História da Matemática e tem o objetivo de apresentar um caso da Teoria dos Números e seu desdobramento histórico sobre uma equação e os personagens mais destacados dentro desse contexto. Em 1657, Pierre de Fermat desafiou os matemáticos ingleses Sir Kenelm Digby e John Wallis a encontrar todas as soluções inteiras positivas da equação $y^2 + 2 = x^3$. A solução (x, y) = (3, 5) foi encontrada por Diophanto muitos séculos antes. Presumivelmente, o desafio foi para mostrar que, exceto essa, não há outras, como Fermat reivindicou ter uma prova de que esta era a única solução. Não é claro, a partir desta distância no tempo, se de fato Fermat tinha uma prova completa. Fizemos um breve relato histórico para conhecer os principais personagens e as suas buscas pelas soluções inteiras do caso geral da equação diofantina $y^2 + 2 = x^3$ e as implicações dessa busca no desenvolvimento da Teoria dos Números.

Palavras-chave: Teoria dos Números. Equações diofantinas. Fermat. Diophanto.

Abstract

This article refers to the presentation of an account without the rigor of the methods used in topics on the history of mathematics and aims to present a case of Number Theory and its historical unfolding about an equation and the most prominent characters within this context. In 1657, Pierre de Fermat challenged the English mathematicians Sir Kenelm Digby and John Wallis to find all the positive integer solutions of the equation $y^2 + 2 = x^3$. The solution (x, y) = (3, 5) was found by Diophanto many centuries earlier. Presumably, the challenge was to show that outside of that one, there are no others, as Fermat claimed to have a proof that this was the only solution. It is not clear from this distance in time whether in fact Fermat had a complete proof of this. We have given a brief historical account to learn about the main characters and their searches for the integer solutions of the general case of the Diophantine equation $y^2 - k = x^3$, and the implications of this search on the development of Number Theory.

Key words: Diophantine Equations. Basic Education. Euclid's Algorithm. Discrete Mathematics.

[1] Doutor em Educação Matemática pela PUC SP. Docente da Universidade do Estado do Pará (UEPA)
E-mail: rubens.vilhena@uepa.br
[2] Licenciada em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA)
E-mail: andrezathalia@gmail.com

Introdução

Equações matemáticas não são apenas úteis; muitas delas também possuem uma bela história. Os cientistas admitem que, muitas vezes, gostam de fórmulas particulares não apenas pela sua utilidade, mas por sua forma e pelas verdades simples e diretas que contêm. Infelizmente, muitos estudantes não vêem dessa forma. Em uma entrevista a Elton Wade, o professor Ian Stewart respondeu porque decidiu escrever o livro "*17 Equações que Mudaram o Mundo*":

> As equações definitivamente podem ser maçantes, e elas podem parecer complicadas, mas isso é porque elas são frequentemente apresentadas de uma maneira monótona e complicada. Eu tenho uma vantagem sobre os professores de matemática da escola: não estou tentando mostrar a você como fazer as somas. Você pode apreciar a beleza e a importância das equações sem saber como resolvê-las... A intenção é localizá-las em seu contexto cultural e humano e retirar o véu de seus efeitos ocultos na história. As equações são uma parte vital de nossa cultura. As histórias por trás deles – as pessoas que as descobriram/inventaram e os períodos em que viveram – são fascinantes.[3]

Embora certas equações diofantinas famosas, como $x^n + y^n = z^n$, onde x, y e z são inteiros positivos e só são permitidas soluções inteiras, denominada *Último Teorema de Fermat* (SINGH, 2008), seja conhecida e famosa, muitas outras equações, menos familiares, também possuem uma história de desafios para os matemáticos.

A equação $y^2 + 2 = x^3$, parece ter sido estudada pela primeira vez, em 1621, por Bachet, que, da solução $x = 3$, $y = 5$, elaborou um método geométrico para construir outras soluções racionais. Fermat, por sua vez, se dedicou ao problema de encontrar todas as soluções inteiras:

[3] https://medium.com/@eltonwade/as-17-equa%C3%A7%C3%B5es-que-mudaram-o-mundo-d7909326e8c4

> Podemos encontrar em inteiros um quadrado diferente de 25 que, aumentado em 2, faz um cubo? À primeira vista, parece uma busca difícil; em frações, uma infinidade de números é deduzida do método de Bachet; mas a doutrina dos números inteiros, que é seguramente muito bonita e muito sutil, não foi cultivada por Bachet, ou por qualquer outro nos escritos que me vieram à mente. (FERMAT, 1896. Tome III, Observations sur Diophante, n. 42, p. 269).

Isto é o que ele diz, especificamente, em uma carta, de 1657, para seu correspondente inglês Sir Kenelm Digby:

> Eu escrevi para ele (no artigo) que há apenas um número inteiro de quadrados que, unido ao binário, faz um cubo, e esse quadrado é 25, ao qual, se você adiciona 2, é 27, que é um cubo. Ele mal consegue acreditar nessa proposição negativa, e acha isso muito ousado e muito geral. Mas, para aumentar seu som, eu digo que se procurarmos por um quadrado que, adicionado a 4, faz um cubo, nunca haverá mais de dois inteiros, e 121, porque 4 é adicionado a 4 a 8, que é um cubo, e 121 a 4 faz com que 125 seja também um cubo; mas, depois disso, toda a infinidade de números não pode fornecer um terceiro que tem a propriedade. (FERMAT, 1896, Tome II, Correspondance, p. 345).

Isso era comum em Fermat, não há realmente nenhum vestígio da solução desse problema em suas obras, por isso é difícil dizer como ele poderia mostrar os fatos anunciados acima (WEIL, 1984. Ch. II, § XVI). Por outro lado, pode-se facilmente imaginar porque matemáticos como Euler e Mordell foram desafiados a pesquisar esse problema e sua generalização para a equação diofantina $y^2 - d = x^3$, sendo d $\in \mathbb{Z}_+$.

Este texto não pretende ser um trabalho de historiador, mas sua finalidade é, ao transmitir com esta equação (que tem a vantagem de ser de fácil entendimento, mas ainda assim não trivial) uma pequena ideia das dificuldades, das buscas incessantes, das mais diversas tentativas, dos progressos e novas teorias matemáticas criadas ao longo dos séculos, que os matemáticos desenvolvem quando tentam responder perguntas de enunciados simples e que se mostram desafios, muitas vezes, intransponíveis por séculos. Relativamente à equação $y^2 + 2 = x^3$, queremos mostrar, de forma bem suscinta, onde e como as dificuldades da teoria emergem e que meios foram usados para lidar com elas.[4]

A seguir apresentamos os personagens de maior destaque em relação as origens e solução da equação $y^2 - d = x^3$.

Os personagens unidos pela equação

Figura 1 – Diophanto de Alexandria
Fonte: http://matematicaacdc.blogspot.com

Alguns historiadores colocam o matemático grego Diophanto de Alexandria vivendo entre 201-214 a 285-289 d.C. Há uma história afirmando que, na sua lápide, foi escrita uma equação diofantina que, ao ser resolvida, indicava que ele viveu 84 anos (RASHED; HOUZEL, 2013).

Diophanto é considerado, de forma equivocada, *o pai da álgebra.* Mas, não há dúvida de que muitos dos métodos para resolver equações lineares e quadráticas, apresentados por ele, remontam à matemática babilônica. Por esta razão, Vogel escreve:

> Diophanto não foi, como sempre foi chamado, o pai da álgebra. No entanto, sua notável, embora assistemática, coleção de

[4] Para uma abordagem matemática e histórica formal veja Weil (1984), Bourbaki (1965), Edwards (1977) e Ribenboim (1979).

> problemas indeterminados é uma realização singular que não foi totalmente apreciada e desenvolvida até muito mais tarde. (VOGEL; SESIANO, 1970-1990, p. 7).

Diophanto nos legou uma coleção de livros, com problemas interessantes, chamada *Arithmetica* (HEATH, 1964). Uma tradução latina desse livro feita por Bachet e que Fermat possuía uma cópia, entraria para a história envolvendo o chamado *Último Teorema de Fermat*, uma vez que, segundo ele, as margens do seu livro não eram suficientes para conter a *maravilhosa demonstração* desse teorema. A busca por essa *demonstração maravilhosa* é um dos grandes épicos dentro da história da Teoria dos Números (SINGH, 2008).

O trabalho de Diophanto, (ou o que dele restou), formou uma base para a álgebra moderna, principalmente, para a Teoria dos Números, e foi seriamente estudado por muitos matemáticos, incluindo Fermat e Euler. Tentativas de generalizar alguns de seus exemplos levaram a problemas famosos e difíceis, incluindo o *Último Teorema de Fermat*, que só foi resolvido mais de 350 anos depois. No Livro II, Diophanto propõe o problema 8: "Como dividir um determinado número quadrado em dois quadrados". Ele mostra como dividir 16:

$$4^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

Fermat leu isso e anotou, na margem do seu livro, que não era possível dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência em duas quartas potências e assim por diante (RIBENBOIM, 1979). Em notação moderna, ele alegou que $x^n + y^n = z^n$ não tem solução em inteiros positivos para n natural e maior que dois. Ou seja, nascia aí o famoso *Último Teorema de Fermat*, motivado por um problema do livro *Arithmetica* de Diophanto.

O problema que dá origem a equação que estamos considerando é muito menos conhecido, mas, talvez, igualmente difícil que ainda não foi, até o momento, completamente resolvido e diz respeito às soluções inteiras (se houver) da equação $y^2 - k = x^3$, com k $\in \mathbb{Z}_+$. Para ser mais preciso, dado k, um inteiro, quando esta equação tem soluções em inteiros? A pergunta surgiu (não sabemos se pela primeira vez), para um caso particular, $y^2 + 2 = x^3$, no Livro VI, problema 17:

> *Determine um triângulo retângulo cuja área adicionada à hipotenusa seja um quadrado e o perímetro seja igual a um cubo.*

Diophanto considerou o seguinte triângulo retângulo em particular (figura 2):

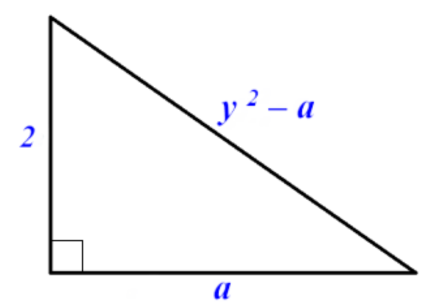


Figura 2. Triângulo retângulo com hipotenusa $y^2 - a$

A solução dada por Diophanto é muito original e interessante. Ele configura o triângulo com catetos $2, a$ e hipotenusa $y^2 - a$, de modo que a área adicionada à hipotenusa é igual a y^2, ou seja, um quadrado. Para satisfazer a segunda condição, ele requer que o perímetro $y^2 + 2$ seja um cubo, isto é, $y^2 + 2 = x^3$(que é o caso para k = -*2*). Neste ponto, Diophanto habilmente coloca y = m+1 e x = m – 1, obtendo uma equação cúbica:

$$m^2 + 2m + 1 + 2 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1 \Leftrightarrow m^3 - 4m^2 + m - 4 = 0$$

e, em seguida, de forma surpreendente para os padrões atuais, afirma que m = 4 sem dar quaisquer razões.

A história nos diz que as equações cúbicas não foram resolvidas de forma geral até cerca de 1500 d.C. (GUILBEAU, 1930), então, como Diophanto conseguiu m=4? Uma possibilidade é ele ter escrito a equação como

$$m^3 + m = 4m^2 + 4$$

e

$$m(m^2 + 1) = 4(m^2 + 1)$$

e equiparou os fatores. Como é muito provável que os números complexos lhe eram desconhecidos, não seria possível considerar as outras duas raízes $m = \pm i$.Mas, sobre isto, não podemos afirmar nada.De qualquer forma, desse modo, ele encontrou a solução(x, y) = (3, 5), e o triângulo retângulo de lados 2, a, 25 – a. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(25 - a)^2 = a^2 + 2^2$$

$$a = \frac{621}{50}$$

Observe que Diophanto considerava válidas as soluções fracionárias para seus problemas, porém, não negativas (HEATH, 1964). De fato, muitos séculos depois, seria provado que x = 3, y = ± 5 são as únicas soluções inteiras para a equação $y^2 + 2 = x^3$. Não está claro se Diophanto sabia disso ou não (IRELAND e ROSEN, 1990). Essa prova, como veremos mais adiante, é devida a Euler, mas Fermat foi o primeiro a fazer essa afirmação sem apresentar uma prova.

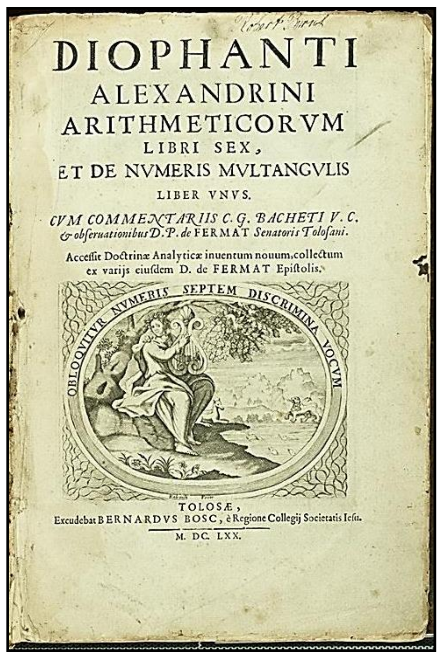
A seguir, apresentaremos o próximo personagem que se tornou famoso por sua tradução em 1621 para o latim do livro *Arithmetica* de Diophanto. Foi uma cópia da tradução do texto grego de Diophanto, que Fermat tinha e que ficou famosa pelas anotações em suas margens.

Figura 3. Claude Gaspar Bachet de Méziriac
Fonte: https://www.daviddarling.info/encyclopedia

Bachet nasceu em Bourg-en-Bresse, França. Seu pai era um aristocrata e o mais alto oficial judicial da província. Sua educação inicial ocorreu em uma casa da ordem dos Jesuítas do Ducado de Savoy. Mais tarde, estudou com os Jesuítas, em Lyon, Pádua e Milão. Em 1601, entrou para a Ordem dos Jesuítas em Milão, onde se presume que lecionou. Infelizmente, adoeceu em 1602 e deixou a ordem dos jesuítas. Ele decidiu levar uma vida de lazer em sua propriedade em Bourg-en-Bresse, que gerava uma renda anual considerável para ele. Bachet casou-se em 1612 e teve sete filhos. Passou quase toda a sua vida morando em sua propriedade, exceto em 1619-1620, quando morou em Paris. Em Paris, foi sugerido que ele se tornasse tutor de Luís XIII. Isso levou a uma saída precipitada da corte real (COLLET; ITARD, 1947).

Bachet foi um escritor de livros sobre enigmas e truques que formaram a base para quase todos os livros posteriores sobre recreações matemáticas (BALL; COXETER. 1942). Bachet também trabalhou em Teoria dos Números e tinha um interesse especial pela Arithmetica de Diophanto.

O trabalho de Bachet, na Teoria dos Números, concentrou-se em equações diofantinas. Em 1612, apresentou uma discussão completa sobre a solução de equações diofantinas lineares. Em 1621, conjecturou que *todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma de quatro quadrados*; ele verificou sua conjectura para todos os inteiros até 325. Além disso, em 1621, Bachet fez profundas pesquisas na equação diofantina $y^2 - d = x^3$ o que levou a ser conhecida até hoje como *Equação de Bachet*. Porém, ele é mais conhecido por sua tradução latina do grego original do livro *Arithmetica de Diophanto* publicada pela primeira vez em 1621 (figura 4).


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Figura 4. Folhade rosto de uma edição de 1670 da Arithmetica de Diophanto
Fonte: https://www.maa.org/

Como já explicitamos, foi em sua cópia deste livro que Fermat escrevia suas famosas anotações. A edição de 1670 foi publicada por Samuel Fermat, filho de Pierre de Fermat. Bachet descobriu um método de construção de quadrados mágicos. Ele foi eleito para a Academia Francesa em 1635. Bachet também compôs obras literárias, incluindo poemas em francês, italiano e latim, traduziu obras religiosas e alguns dos escritos de Ovídio e publicou uma antologia de poemas franceses intitulada *Délices* (O'CONNOR; ROBERTSON, 2006). A partir do seu interesse pelo problema 17 do Livro VI, de Diophanto, começou a pesquisar maneiras de obter novas soluções a partir da solução (x, y) =(3, 5).

Foi então que considerou o caso mais geral $y^2 - k = x^3$ onde $k \neq 1$ e, em 1621, apresentou uma propriedade surpreendente desta equação que ficou conhecida como *Fórmula da Duplicação de Bachet.*

Quando (x, y) é uma solução para esta equação, onde x, y $\in \mathbb{Q}$, pode-se mostrar que

$$\left(\frac{x^4 - 8kx}{4y^2}, \frac{-x^6 - 20kx^3 + 8k^2}{8y^3}\right)$$

também é uma solução para a mesma equação. Além disso, se (x, y) é uma solução, tal que $xy \neq 0$ e $k \neq 1$, então, isso leva a infinitas soluções racionais, o que não foi provado por Bachet. Portanto, se um inteiro pode ser expresso como a diferença entre um quadrado e um cubo, isso pode ser feito de inúmeras maneiras com valores racionais. Por exemplo, se começamos por uma solução (3, 5) para $y^2 + 2 = x^3$, aplicando a fórmula de duplicação, temos uma série de soluções racionais

$$(3,5), \left(\frac{129}{10^2}, \frac{383}{10^2}\right), \left(\frac{2340922881}{7660^2}, \frac{113259286337292}{7660^3}\right), \ldots,$$

(SOYDAN, DEMIRCI, IKIKARDES e CANGÜL, 2007).

É de se imaginar que, de alguma forma, Bachet deve ter se decepcionado com esse seu método inovador. Com certeza, ele buscava encontrar outras soluções inteiras para a equação $y^2 + 2 = x^3$. Novamente temos um fato curioso, semelhante ao valor $m = 4$, estabelecido por Diophanto, relacionado com essa equação. A grande questão, que permanece nos domínios das histórias de mistérios da Teoria dos Números, é: como Bachet descobriu essa fórmula? Para angústia de muitos, Bachet também não disse como conseguiu esse método de obter soluções racionais.

Em Randrianarisoa (2011),pode-se ver uma demonstração da fórmula da duplicação de Bachet.

Assim, Bachet deixou para a posteridade a prova de que, se a equação $y^2 - k = x^3$ tem uma solução racional, então ela possui infinitas soluções racionais (EVEREST e HARD, 2011). Mas, a pergunta deixada por Bachet, que é a razão deste artigo, tem um enunciado bem simples:

> *Para x, y, k inteiros, quais são todas as soluções inteiras da equação $y^2 - k = x^3$, com $k \neq 1$?*

Começava aí mais uma das buscas incessantes por uma prova, que é parte da rica história da Teoria dos Números. Esta equação de enunciado tão simples, quanto o enunciado do *Último Teorema de Fermat*, originados de problemas do livro de Diophanto, entraria para uma das teorias matemáticas mais avançadas, atualmente chamada *curvas elípticas* e causaria novas e fascinantes descobertas na Teoria dos Números. Como ilustração, vejamos um gráfico para a equação elíptica $y^2 + 2 = x^3$ e destacando sua única solução inteira (3, 5) (figura 5):

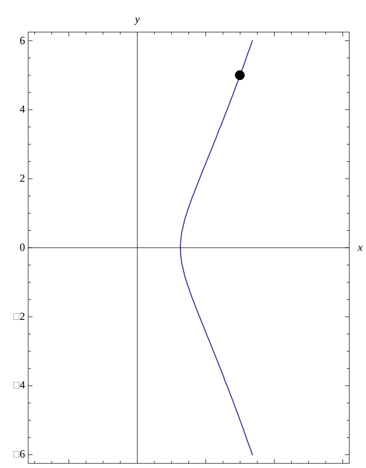


Figura 5. Solução inteira (3, 5) da equação $y^2 + 2 = x^3$

O próximo personagem a ser apresentado era contemporâneo de Bachet e um alto funcionário do governo francês. Graças ao seu interesse pela Teoria dos Números, ela alcançaria o patamar de destaque que possui hoje na Matemática, a ponto de ser considerada, pelos matemáticos, a sua Rainha.

Figura 6. Pierre de Fermat
Fonte: https://www.alamy.com

Pierre de Fermat (1601-1665) foi advogado, juiz e oficial do governo em Toulouse. Jurista e magistrado por profissão, dedicava à Matemática apenas as suas horas de lazer e, mesmo assim, foi considerado por Blaise Pascal (1623-1662) o maior matemático de seu tempo. Fermat foi provavelmente o matemático amador mais famoso da história. Ele não publicou quase nenhuma de suas descobertas matemáticas, mas se correspondeu com matemáticos contemporâneos sobre elas. Dos seus correspondentes, especialmente do monge francês Marin Mersenne (1588-1648), o mundo soube das suas muitas contribuições para a matemática. Fermat foi um dos inventores da geometria analítica. Além disso, ele lançou as bases do cálculo. Fermat, juntamente com Pascal, deu uma base matemática ao conceito de probabilidade (MAHONEY, 1994).

A influência de Pierre de Fermat foi limitada pela falta de interesse na publicação das suas descobertas, conhecidas principalmente pelas cartas a amigos e anotações na sua cópia da *Arithmetica* de Diophanto.

Algumas das descobertas de Fermat chegaram até nós apenas porque ele fez suas famosas anotações. Seu filho encontrou sua cópia com essas notas e as publicou (SWETZ, 2015).

Fermat gostava de trocar e resolver desafios. Dedicou grande parte de seus esforços matemáticos em analisar os problemas contidos na *Arithmetica* de Diophanto.

A Teoria dos Números exerceu um grande fascínio em Fermat. Suas notas e comentários sobre numerosos teoremas são de uma elegância considerável. A maioria das provas de Fermat não foi encontrada e é possível que, algumas delas, não existissem. Quem sabe algum tipo de indução por analogia e sua intuição de gênio foram o bastante para levá-lo a resultados corretos.

É na Teoria dos Números que se encontra o seu famoso teorema, conhecido como *Último Teorema de Fermat.* Este difícil teorema tem um enunciado muito simples:

> *Não existe nenhum conjunto de inteiros (x, y, z) com n inteiro maior que 2, e satisfaça a equação* $x^n + y^n = z^n$

Este teorema enfatiza bem o fato de que, Teoria dos Números se caracteriza por enunciados simples e soluções (quando existem), muitas vezes, extremamente complicadas. Ficou famosa a frase de Fermat: “Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é demasiado estreita para a conter". (SINGH, 2008, p.80). O mistério sobre essa demonstração levou mais de 350 anos para ser resolvido. Andrew Wiles, um matemático britânico, conseguiu demonstrá-lo definitivamente em 1995 (SINGH, 2008).

Essa equação é o problema mais famoso, relacionada a Fermat, e acabou ofuscando para o público em geral, a história não menos interessante da equação de Bachet.

Fermat desafiava repetidamente os matemáticos europeus, em particular os ingleses, enviando-lhes problemas que ele alegava ter resolvido e pedindo provas. Dois deles foram enviados para John Wallis (1616-1703) em 1657:

- Prove que a única solução inteira positiva da equação $y^2 + 2 = x^3$ é (5, 3);
- Prove que as únicas soluções inteiras positivas da equação $y^2 + 4 = x^3$ são (2, 2) e (11, 5).

Esses problemas geraram um grande controvérsia e cartas nada amistosas, envolvendo os franceses Fermat, Bernard Frenicle de Bessy (1605-1675), Pierre de Carcavi (1600-1684) e os britânicos John Wallis, Kenelm Digby (1603 - 1665) e William Brouncker (1620-1684) (TANNERY, HENRY e WAARD, 1891-1922).

Em uma carta ao seu colega inglês, Digby, Wallis chamou os problemas de Fermat de triviais e inúteis (não poderia estar mais enganado), e enviou alguns problemas que ele afirmava serem de natureza semelhante. Quando Fermat soube dos comentários de Wallis e tomou conhecimento das questões, chamou os problemas de Wallis de “meras diversões de três dias para quem soubesse um pouco de aritmética", em uma carta a Digby. De fato, enquanto os problemas de Fermat eram extremamente difíceis, os problemas enviados por Wallis eram resolvidos com meras simplificações algébricas. Essa atitude de considerar a Aritmética como algo trivial permanece e traz sérios prejuízos educacionais (ZAZKIS, 2009).

Nessas controvérsias, o interesse era sempre por soluções em inteiros positivos, já que no, tempo de Fermat os números negativos não eram bem aceitos pelos matemáticos.

Em uma carta de 1659 a Pierre de Carcavi, Fermat afirmou que podia provar que a única solução inteira da equação $y^2+2=x^3$era (3, 5) e as únicas soluções inteiras da equação $y^2+4=x^3$ eram (2, 2) e (5, 11) (TANNERY, HENRY e WAARD, 1891-1922). Assim como no caso do "último teorema", pode ser que Fermat não tivesse, de fato, uma prova, ou que levou para o túmulo o segredo das suas descobertas. A ferramenta matemática conhecida hoje que seria usada para responder essa questão, só seria inventada no século seguinte.

Essas controvérsias e os trabalhos inovadores de Fermat, em uma área ainda não explorada na matemática, acabaram atraindo a atenção de um gigante matemático nascido na Suíça, no século XVIII, que passou a maior parte da vida na Rússia e na Alemanha, se tornando o criador de uma nova área na Teoria dos Números denominada de *números algébricos,* que conectava números inteiros com números complexos. Chamado, por Laplace, de o *mestre de todos nós*. Será o próximo personagem nesta história.

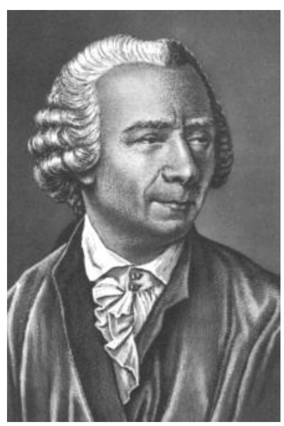


Figura 6. Leonhard Euler
Fonte: https://spectramagazine.org/mathematics

Uma declaração atribuída a Pierre-Simon Laplace (1749-1827) demonstra a influência de Euler na matemática: "*Leiam Euler, leiam Euler, ele é o mestre de todos nós.*" (DUNHAM, 1999).

Leonhard Euler (1707-1783) foi um dos mais prolíficos matemáticos da Europa. Euler legou à posteridade um número assombroso de trabalhos sobre as mais diversas áreas, da Engenharia à Mecânica, da Óptica à Astronomia, da Música à Matemática (curvas, séries, cálculo de variações, cálculo infinitesimal, Geometria, Álgebra). Produziu tanto ao longo de sua vida que, durante quase 50 anos, depois da sua morte, os seus artigos continuaram a ser publicadas na Academia de S. Petersburgo. A lista bibliográfica das suas obras, incluindo itens póstumos, contém 886 títulos. A sua pesquisa matemática chegava a ser, em média, de 800 páginas por ano, durante toda a sua vida (FUETER, 1948).

O interesse de Euler pela Teoria dos Números pode ser atribuído à influência de Christian Goldbach (1690–1764), seu amigo na Academia de São Petersburgo. Muitos dos primeiros trabalhos de Euler na Teoria dos Números foram baseados nas obras de Pierre de Fermat. Euler desenvolveu algumas das ideias de Fermat, e refutou algumas das suas conjeturas. Euler também conjeturou a lei da reciprocidade quadrática. O conceito é considerado como um teorema fundamental da teoria dos números, e suas ideias pavimentaram o caminho para o trabalho de Carl Friedrich Gauss (1777- 1855)

> Euler não só contribuiu para a teoria dos números como também escreveu um popular texto de álgebra que apareceu em edições alemãs e russas em S. Petersburgo em 1770-1772, em francês em 1774, e em numerosas outras versões, inclusive edições americanas em inglês. As qualidades excepcionalmente didáticas da Álgebra de Euler são atribuídas ao facto de ter sido ditada pelo autor cego a pessoa relativamente desesperada. (BOYER, 1974, p. 337).

Euler criou uma nova teoria matemática para verificar a afirmação de Fermat sobre as soluções inteiras da equação diofantina $y^2 + 2 = x^3$: A *Teoria Algébrica dos Números* (DICKSON, 2005).

A partir do século XIX, métodos da Análise Matemática passaram a desempenhar um papel fundamental na pesquisa em Teoria dos Números. Essainter-relação entre Análise e Teoria dos Números tem suas origens no trabalho de Euler e teve um amplo desenvolvimento pelo matemático Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e Ernst Eduard Kummer (1810-1893)no seu trabalho pioneiro sobre o "último teorema de Fermat" (BELL, 1986).

Euler foi o primeiro matemático a aplicar as ideias da Análise a problemas de Teoria dos Números. Na verdade, como se observou posteriormente, ele estava utilizando técnicas da Teoria das Funções Complexas. Dessa forma, estudou dois problemas fundamentais da Teoria dos Números. O primeiro problema em que Euler aplicou os métodos analíticos diz respeito a soluções inteiras de equações diofantinas. O outro problema se relacionava com o comportamento da sequência de números primos no conjunto dos números inteiros positivos (BOYER, 1974).

Sendo bastante comedido nos aspectos mais profundos da matemática subjacente ao assunto, de modo a não nos desviarmos da linha de apresentação deste artigo, vamos dar uma ideia simplificada de como Euler provou que Fermat estava correto em sua afirmação sobre a única solução inteira positiva da equação$y^2 + 2 = x^3$. A prova apresentada por Euler (HEATH, 1964) considera o conjunto

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right] = \{a + b\sqrt{-2}, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Euler fez o seguinte:

$$x^3 = y^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 = (y + \sqrt{-2})(y - \sqrt{-2}) \text{ (I)}$$

Euler argumenta que, se os dois fatores do lado direito de (I) são conjugados, então, $(y + \sqrt{-2})$ é um cubo em $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]$, então um deles deve ser um cubo. Assim,

$$y + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3$$

$$y + i\sqrt{2} = a^3 + 3i\sqrt{2}a^2b - 6ab^2 - 2i\sqrt{2}b^3$$

$$y + i\sqrt{2} = a^3 - 6ab^2 + i\sqrt{2}(3a^2b - 2b^3)$$

Comparando as partes reais e imaginárias, temos:

$$y = a^3 - 6ab^2 \ \text{ e } \ 1 = b(3a^2 - 2b^3).$$

Devemos ter b = 1,

$$3a^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Os valores de y:

$$y = (\pm 1)^3 - 6(\pm 1) = \pm 5.$$

Então, x = 3.

Com argumento análogo, Euler fez a prova para $y^2 + 4 = x^3$. Um grande feito do mestre Euler!

Vamos finalizar apresentando o matemático que dedicou grande parte da sua vida a estudar essa antiga equação e, por essa razão, ela passou a levar também o seu nome.

Figura 7. Louis Joel Mordell
Fonte: http://www.bibmath.net/bios/

Louis Joel Mordell (1888-1972) nasceu na Philadelphia, USA. Ganhou uma bolsa para estudar em Cambridge, na Inglaterra. Em 1929, recebeu a cidadania britânica e, por isso, é considerado um matemático britânico.

Quando faleceu, em 1972, Mordell havia acumulado inúmeras honrarias matemáticas. Ele foi professor de matemática pura em Cambridge, entre 1945 e 1953, e presidente da *London Mathematical Society* entre 1943 e 1945; foi eleito membro da Royal Society em 1924 e era um membro estrangeiro das Academias de Oslo, Uppsala e Bolonha. A lista de instituições de todo o mundo que o convidaram para ser palestrante visitante chegava a quase 200 itens. Ele recebeu a *Medalha De Morgan*, em 1941, o *Prêmio Berwick Sênior*, em 1946 e a *Medalha Sylvester*, em 1949, "por suas pesquisas ilustres em matemática pura, especialmente por suas descobertas na Teoria dos números";foi reconhecido por ter construído "uma forte escola de matemática em Manchester" durante os anos 1930; era famoso pelo "teorema de base finita" que havia provado em um artigo de 1922. Havia um “teorema de Mordell-Weil” e uma “conjectura de Mordell e, finalmente, havia uma “Equação de Mordell”, ou seja, a equação diofantina $y^2 - k = x^3$ (CASSELS, 1973).

Depois de se formar, Mordell começou a investigação independente sobre determinadas equações diofantinas e dedicou grande parte da sua vida de investigador matemático à equação $y^2 - k = x^3$ e, devido às profundas descobertas que fez, hoje ela passou a ser conhecida como *Equação de Mordell-Bachet* (LANG, 1995).

Como o próprio Mordell explicou em suas *Reminiscences of an Octogenarian Mathematician*, a equação $y^2 - k = x^3$ “desempenhou um papel proeminente em sua pesquisa” ao longo de toda a sua carreira (MORDELL, 1971, p. 956–957) – significativamente, tinha sido o tema de sua palestra inaugural, em 1945, como Professor Sadleriano[5]. Esta equação foi o objeto de seu primeiro artigo substancial publicado, datado de 1912 e publicado em 1914 (MORDELL, 1914), pelo qual ele recebeu o segundo Prêmio Smith de 1912e que contém resultados sobre a possibilidade de resolver a equação em função dos valores de k. Mordell voltou à equação $y^2 - k = x^3$ alguns anos depois, em 1920, provando que ela tem no máximo um número finito de soluções inteiras para qualquer parâmetro inteiro k (MORDELL, 1920).

Mordell observou que a equação de Bachet $y^2 - k = x^3$ desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da teoria dos números nos mais de 300 anos em que vem sendo estudada. Casos especiais foram resolvidos por vários matemáticos ao longo dos séculos XVIII e XIX (MORDELL, 1969, p.238). Mostramos que Euler apresentou uma nova ideia fundamental para resolver $y^2 + 2 = x^3$ aplicando uma fatoração que gerou a equação$\left(x + i\sqrt{2}\right)\left(x - i\sqrt{2}\right) = y^3$. O resultado foi uma equação em um domínio D de "inteiros complexos", onde

$$D = \left\{a + bi\sqrt{2} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Este foi o primeiro uso de números complexos – “objetos estranhos” – na Teoria dos Números. As ideias envolvidas na solução da equação implicaram em novas questões a serem pesquisadas em Teoria dos Números, como considerar se D era um *domínio de fatoração única,* e foram parte do desenvolvimento que deu origem no século XIX à Teoria Algébrica dos Números (EDWARDS, 1977).

Em 1922, Mordell apresentou partes de um resultado surpreendente (EVEREST & HARD, 2011). Resultado que foi provado,de forma completa,

[5]Professor Sadleiriano de Matemática Pura (original: Sadleirian Professor of Pure Mathematics) é uma cátedra de matemática pura da Universidade de Cambridge. Foi estabelecida em 1701 por Lady Mary Sadleir, que disponibilizou provisões de sua herança para aulas de álgebra a serem fundadas em nove colégios da universidade. Ela morreu em 1706 e as aulas iniciaram em 1710. Em 1860, as aulas foram convertidas em cátedras (PIAGGIO,1931).

em 1929, por Carl Ludwig Siegel (1896 –1981). Mordell afirmou que a equação $y^2 - k = x^3$tem finitas soluções inteiras para cada k (pode não ter nenhuma).

Mordell demonstrou, por exemplo, que a equação $y^2 + 45 = x^3$ não possui soluções inteiras (MORDELL, 1969, p. 239). Na década de 1960, Alan Baker (1939-2018) e Harold Mead Stark (1939-) deram limites explcitos para x e y em termos de k, de modo que, em teoria, todas as soluções para um dado k podem ser encontradas computacionalmente. Além disso, Baker observa que

> [...] foram elaboradas técnicas que, para uma ampla gama de exemplos numéricos, tornam o problema de determinar a lista completa de soluções em questão acessíveis por computadores. (BAKER, 1990, p. 45).

Hoje em dia, já existem métodos teóricos para resolver explicitamente algumas equações para determinados valores de k e poderosos recursos computacionais para verificação de valores inteiros. Os primeiros resultados nessa direção são baseados em complexas técnicas computacionais envolvendo formas lineares em logaritmos, apresentadas, a partir de 1966, por Baker. Graças a esse trabalho, Baker ganhou a *Medalha Fields* em 1970.

A equação de Bachet é um exemplo importante de uma curva elíptica. (Uma *curva elíptica* é uma curva plana representada pela equação $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde *a, b, c, d* são números inteiros ou racionais e o polinômio cúbico no lado direito da equação tem raízes distintas.) Na verdade,

> [a equação de Bachet], por mais especial que possa parecer, é a atriz principal no drama diofantino e, em certo sentido, "representa" a Teoria aritmética das curvas elípticas. Um dos objetivos deste artigo é dar informações sobre por que a equa-

ção [de Bachet] desempenha esse papel central. (MAZUR, 2000, p. 196).

O estudo das curvas elípticas envolveu o uso de métodos poderosos, incluindo os da geometria algébrica. A teoria das curvas elípticas tem sido um dos principais tópicos de pesquisa da Teoria dos números moderna (WEIL, 1984, p. 124).

Mordell provou um teorema mais geral relacionado aos pontos inteiros de curvas elípticas. Atualmente, chamamos uma *curva de Mordell*, a uma curva elíptica da forma $y^2 - k = x^3$, onde k é um inteiro fixo não-nulo, devido às suas pesquisas que mostraram que cada *curva de Mordell* contém apenas finitos pontos inteiros (x, y). Em outras palavras, as diferenças entre quadrados perfeitos e cubos perfeitos tendem ao ∞.

Na figura 8, são destacados os cinco pontos, com coordenadas cujos valores são números inteiros, da curva de Mordell $y^2 - 1 = x^3$.

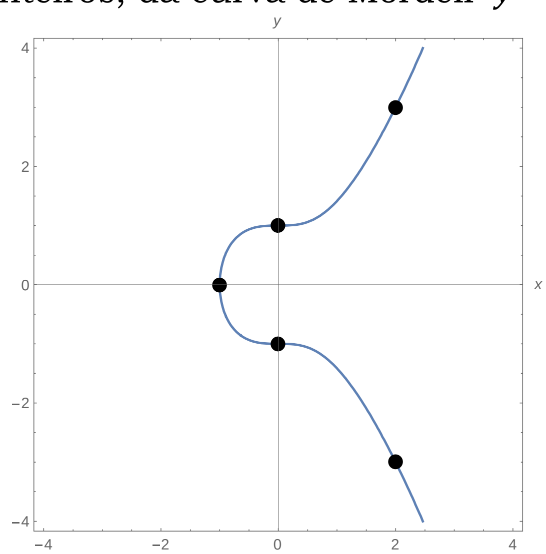


Figura 8. Curva de Mordell $y^2 - 1 = x^3$,
com as únicas coordenadas inteiras (-1, 0), (0, ±1) e (2, ±3)

As pesquisas de Mordell abriram caminho para que seu colega, Baker, desenvolvesse procedimentos que permitiram definir e encontrar todas as seis soluções inteiras da equação $y^2 + 28 = x^3$ destacadas no gráfico (figura 9).

x	4	8	37
y	± 6	± 22	± 225

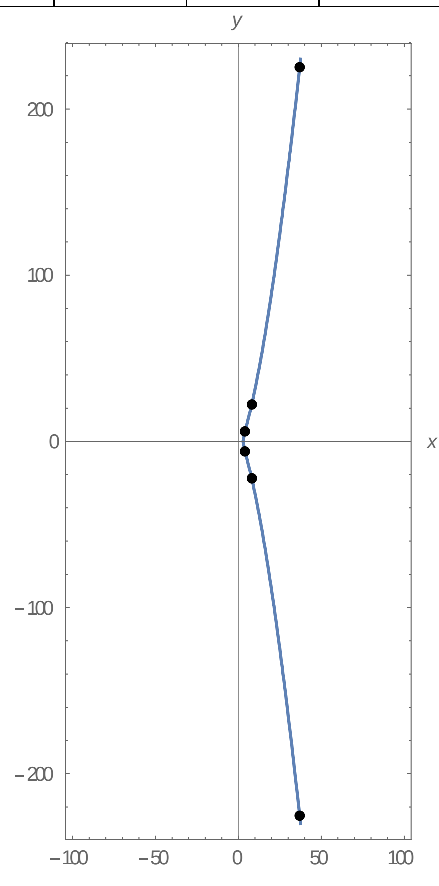


Figura 9. Curva de Mordell $y^2 + 28 = x^3$

É lógico que essa apresentação está longe de ser justa com todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram com o desenvolvimento teórico da equação que hoje é conhecida como *Bachet-Mordell-Siegel*. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), por exemplo, não estudou a equação $y^2 - k = x^3$, mas sua prova da *Lei de Reciprocidade Quadrática*, considerada por ele a *joia mais preciosa da Teoria dos Números*, foi fundamental para Mordell provar quais equações de Bachet possuíam soluções inteiras.

Alguns matemáticos do século XIX, que também contribuíram diretamente com trabalhos sobre a equação, são Victor-Amédée Lebesgue (1791-1875), Camille-Christophe Gerono (1799-1891), Ernest Jean Philippe Fauque de Jonquières (1820-1901), Savino Realis (1818-1886) e Jean François Théophile Pépin (1826-1904). Todos eles publicaram artigos na *Nouvelles Annales de Mathématiques* (ROLLET e NABONNAND, 2013).

Os artigos enfocavam equações específicas, como estas: $y^2 - 7 = x^3$ (Lebesgue, em1869) ou$y^2 + 17 = x^3$ (Gerono, em 1877), que se mostraram impossíveis de resolver em inteiros, ou pesquisas de fórmulas para o parâmetro k para tornar a equação correspondente insolúvel: por exemplo, generalizando os resultados que Jonquières havia obtido em 1878; Realis, em 1883, provou que, para quaisquer inteiros a e b, a equação $y^2 = x^3 + b^2(\pm 8b - 3a^2)$ não tem soluções inteiras (CUNNINGHAM, 1905; 1908).

Conclusão

O britânico Andrew Wiles (1953) teve seu primeiro contato com o *ÚltimoTeorema de Fermat* em 1963, quando ainda estava com dez anos de idade. Ele ficou fascinado com o fato de um problema aparentemente simples não ter tido solução em trezentos anos e, desde então, prometeu a si mesmo demonstrá-lo (SINGH, 2008). Em 1994, trinta anos depois da sua promessa, Andrew entrou para a história, sendo conhecido como o matemático que demonstrou o teorema mais desafiador da História da Matemática.

Não é à toa que a Teoria dos Números é considerada a Rainha da Matemática. Está cheia de histórias fortemente carregadas de emoções humanas profundas. Assim como na história do *Último Teorema de Fermat,* a resumida história contada aqui levou quase dois mil anos depois de Diophanto e mais de 300 anos depois de Bachet para ser ter uma resposta sobre o número de soluções inteiras da equação $y^2 - k = x^3$.

Claro que, por uma questão de racionalidade, o artigo tinha que ser resumido. Mas, queríamos dar uma ideia da emocionante aventura do espírito humano que é a Teoria dos Números. Infelizmente, este é o tipo de assunto matemático não muito apreciado. A Teoria dos Números não se adapta num contexto do tipo "para que serve isso". Seu contexto é a liberdade. Na Teoria dos Números, não podem existir imposições, limitação de tempo. O pensamento matemático, as ideias, as abstrações, os erros, os muitos erros precisam de liberdade e não de imposições a um utilitarismo que não é inerente ao fazer matemático.

O próprio Mordell relata que não teve uma melhor formação em Teoria dos Números por falta do interesse dos matemáticos britânicos pelo assunto no início do século XX e, por esse motivo, teve que estudar por conta própria. Ele escreveu que os matemáticos ingleses da época tendiam a negligenciar tal assunto porque suas conclusões não tinham nenhuma importância prática (MORDELL, 1918). Ele também criticou o sistema educacional por causa do foco excessivo que era colocado apenas nos exames e nos tópicos que eram os assuntos principais desses exames, tirando de muitos alunos a oportunidade de estudar conteúdos importantes de matemática pura. Mordell também afirmou que o sistema de bolsas forçou jovens acadêmicos a produzir artigos matemáticos que não exigiam muito tempo de dedicação a fim de cumprir prazos.

Documentos como a BNNC – Base Nacional Comum Curricular, a despeito da sua grande importância, não abre espaço para a Matemática como uma produção própria do pensamento humano para o desenvolvimento da própria matemática. Nossa crítica, de modo nenhum, procura tirar os méritos das aplicações.

Estudar Teoria dos Números se assemelha à seguinte história: em 1923, durante uma visita a Nova York em busca de patrocínio para sua próxima expedição ao Everest, o montanhista inglês George Mallory, cansado de responder à mesma pergunta repetidas vezes, “por que você quer escalar o Everest?”, cunhou a expressão mais famosa e lacônica da história do montanhismo sobre o que leva alguém a subir uma montanha: “porque está lá”. Em Teoria dos Números, os problemas “estão lá”[6].

Os grandes avanços na matemática sejam na construção da sua própria estrutura, sejam nas mais diversas aplicações para a humanidade, começam com pessoas determinadas em seus espíritos a dedicar toda uma vida, outras que aceitam os desafios seculares deixados por seus antecessores e nunca desistem porque seu desejo, sua obsessão é responder perguntas simples como:

A equação $y^2 - k = x^3$ possui soluções inteiras?

Referências

BALL, W. W. R.; COXETER, H. S. M.**Mathematical recreations and essays**. London: Macmillan, 1942.

BELL, E. T. **Men of Mathematics, Simon and Schuster**. New York: Simon and Schuster, Inc., 1986.

BOURBAKI, N. **Algèbre Commutative, Chapitres 5 à 7**. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[6] http://www.extremos.com.br/editor/081201.asp

BOYER, C. B. **História da Matemática**.Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CASSELS, J.W. S. "Louis Joel Mordell 1888–1972", Biographical Memoirs. Published: 1 December 1973.
Disponível em: https://doi.org/10.1098/rsbm.1973.0018. Acesso em: 26 out. 2020.

COLLET, C. G., ITARD, J. Un mathematician humaniste: Claude-Gaspar Bachet de Meziriac, 1581-1638. **Revue d'histoire des sciences.**n. 1, p. 26-50, 1947.

CUNNINGHAM, A. Solution to question 16408. **Mathematical Questions and Solutions from "The Educational Times",** 2nd ser. 14, p. 106–108. 1908.

CUNNINGHAM, A. "Solution to question 15697. Find all the integral solutions, if possible, of the equation $x^2 + 17 = y^3$", **Mathematical Questions and Solutions from "The Educational Times"**, 2nd ser. 8, p. 53–54. 1905.

DICKSON. L. E. **History of the Theory of Numbers.** New York: Dover Publications Inc., 2005. v. 1-3.

DUNHAM, W. **Euler:** the master of us all.Washington, D.C: Mathematical Association of America, 1999.

EDWARDS, H. M. **Fermat's last theorem**. New York: Springer-Verlag, 1977.

EVEREST, G.; WARD, T. A repulsion motif in Diophantine Equations. **The American Mathematical Monthly,** v. 118, n. 7, p. 584-598, aug./sep. 2011.

FERMAT. Pierre de. **Oeuvres compl`etes.** Paris: Gauthier-Villars, 1896.

FUETER, R. **Leonhard Euler.** Basel: Birkhäuser Verlag, 1948.

GUILBEAU, L. The history of the solution of the cubic equation. **Mathematics News Letter**, 5 (4), p. 8–12. 1930.

HEATH, T L. **Diophantus of Alexandria:** a study in the history of Greek Algebra. Connecticut: Martino Fine Books, 2009.

IRELAND K., ROSEN M. Diophantine Equations. In: **A classical introduction to Modern Number Theory.** Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1990. v. 84.

LANG, S. Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, Diophantine geometry, and 20th century mathematics. **Notices Amer. Math. Soc.**, 42 (3), p. 339-350, 1995.

MAHONEY, M. S. The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665). Second edition. Princeton: Princeton University Press, 1994.

MAZUR, B. Questions about powers of numbers. **Notices Amer. Math. Soc**., n. 47, p. 195–202, 2000.

MORDEL, L. J. A statement by Fermat. **Proceedings of the London Mathematical Society**, 2nd ser. 18, p. v–vi, 1920.

MORDEL, L. J. Reminiscences of an Octogenarian Mathematician. **The American Mathematical Monthly**,n. 78, p. 952–961,1971.

MORDEL, L. J. The Diophantine Equation $y^2 - k = x^3$. **Proceedings of the London Mathematical Society**, 2nd ser. 13, p. 60–80, 1914.

MORDELL, L. J.**Diophantine Equations**. New York; London: Academic Press,1969.

MORDELL. The Theory of Numbers.**Science Progress**, n. 12, p. 127–131, 1918.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **MacTutor History of Mathematics Archive. Claude Gaspar Bachet de Méziriac.**
Disponível em:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bachet/ Acesso em: 13 jun. 2020.

PIAGGIO, H. T. H. Three Sadleirian Professors: A. R. Forsyth, E. W. Hobson and G. H. Hardy.**The Mathematical Gazette**, 15 (215), p. 431-465,1931.

RANDRIANARISOA, T. H. **The Mordell Theorem.** Essay, supervised by Prof. Florian Breuer, to finalise study at the African Institute for Mathematical Sciences, 2001.
Disponível em:
https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=YWltcy5hYy56YXxhcmNoaXZlfGd4Ojc2ZmNlY2IzZjM0YWIwOWU. Acesso em: 26 out. 2020.

RASHED, Roshdi, HOUZEL, Christian.**Les Arithmétiques de Diophante**: Lecture historique et mathématique, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2013.

RIBENBOIM, P. **13 lectures on Fermat's last theorem**. New York: Springer, 1979.

ROLLET, L.; NABONNAND, P. Un journal pour les mathématiquesspéciales: les Nouvelles annales de mathématiques (1842-1927). **Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciale**, 86, p. 5-18. 2013.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat.** Rio de Janeiro: Editora Record. 2008.

STEWART, I. **17 equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

SWETZ, F. J. **Mathematical Treasure:** Bachet's Arithmetic of Diophantus. The Pennsylvania State University. Convergence, 2015

TANNERY, P.; HENRY, C.; WAARD, C. **Oeuvres de Fermat**, publiées sous les auspices du Ministère de l'instruction publique, Paris: Gauthier-Villars et Cie., 1891-1922.

VOGEL, K. **Dictionary of Scientific Biography**. New York: Charles Scribner's Sons, v.9, 1981.

WEIL, A. **Number Theory**: an approach through History, from Hammurapi to Legendre, Birkhäuser. New York: Springer, 1984.

ZAZKIS, R. Number Theory in Mathematics Education: Queen and Servant. **Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education**. v. 8, n. 1, 2009.16 p.

Artigo recebido em: 19 mar. 2021
Artigo aprovado em: 17 jun. 2021